OPUSCOLI
DI
GEOMETRIA E BALISTICA
DI
LEONARDO SALIMBENI
CAPITANO D' INGEGNERI
E PROFESSORE DI MATEMATICA NELLE SCUOLE MILITARI DI VERONA.

IN VERONA
PER GLI EREDI DI MARCO MORONI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.
CIↃDCCLXXX.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR

GIOVANNI BATTISTA DA RIVA

SAVIO DEL CONSIGLIO

LEONARDO SALIMBENI.

QUesti due Opuſculi, frutto di quegli ſtudj che per dovere e per inclinazione coltivo, offeriſco all' E. V. per dimoſtrarle almeno con queſto, poichè con altro non poſſo, che io ſon memore e grato di quel molto, che da lei ri-

conoſco . So che il dono è ineguale alla grandezza de'beneſizj, che ho da lei ricevuto, ma ſo altresì ch'egli è tale, quale ho ſaputo fare maggiore; ſicchè ella non può dolerſi ſe non le preſento coſa più degna, che varrebbe bensì a provare felicità d'ingegno, ma non intenzione migliore. Degni dunque d'accettare l' E. V. queſta picciola Operetta come un tributo, che l'è dovuto, e di riguardarla ſiccome coſa ſua; certa, che quando anche da queſta conſiderazione non foſſi ſtato moſſo, l'avrei però ſempre all' E. V. offerta per poterle ſignificare quanta riverenza e venerazione io le porti per tutte quelle rare doti, ch'ella poſſede, e che le hanno conciliato la ſtima univerſale, e gli alti onori della ſua nobiliſſima Patria. Intorno alla qual coſa, ſiccome il dire di più ſo,

che

che cagionerebbe diſpiacere all' E. V., che ama più di eſſere che di parere, più di meritare che di riſcuotere le lodi, così io non aggiungerò parola, ma farò fine col ſupplicarla a preſtare all' Opera, e di continuare all' Autore il ſuo valevoliſſimo patrocinio.

Verona addi 1 Giugno 1780

OPU-

OPUSCOLO PRIMO

GEOMETRICO

DOVE SI PROVA

CHE IL MASSIMO DE' POLIGONI, DA QUALSIVOGLIA NUMERO DI LINEE RETTE DATE DESCRITTO, E' QUELLO D' INTORNO A CUI SI PUO' CIRCONSCRIVERE UN CERCHIO.

PREFAZIONE.

SE tutti i Matematici de' presenti tempi si studiassero d'imitare quel metodo rigoroso ed esatto, col quale venivano dagli Antichi esposte le materie più difficili ed astruse, riuscirebbero certamente le Opere di molti, che affettano una certa brevità, meno oscure e più intelligibili, e molto di vantaggio tutte ne ritrarrebbero in generale le Matematiche Discipline. Imperciocchè niuna cosa può più confondere le menti umane, e rendere atto allo studio di queste sublimi Scienze un minor numero d' ingegni, quanto il trattarle, in vece, con quel metodo conciso e compen-

dioso, che suppone una facilità di concepire le idee, la quale poi poche volte si verifica col fatto e in pratica. Ognuno, che sia versato nelle Matematiche, e che abbia proccurato di attignere a' diversi fonti il buono ed il migliore, può far fede, quanta differenza passi a leggere un' Opera scritta con istile veramente Matematico, e un' altra con quello posto in uso da buona parte de' moderni Scrittori. Nella prima si scorre velocemente da una all' altra verità senza ritrovare intoppi, e senza confondersi, mentre nella seconda conviene ad ogni passo fermarsi per conoscere la ragione di questa e di quell' asserzione, e per discernere il legame, che hanno fra di loro; cosicchè di sovente accade, che senza l' ajuto di qualche Commentatore, molte cose non s' intendano. In somma è tanto grande la oscurità di questi Autori, de' quali io parlo, che quantunque sieno le loro dimostrazioni brevemente scritte, sono

però

però intese con maggiore difficoltà, e in più tempo delle altre fatte ad imitazione degli Antichi, nelle quali il difetto della prolissità (se prolissa può dirsi quella cosa dove non si dica, che quanto occorre per farsi intendere) è fuor di misura compensato dalla chiarezza.

Per la qual cosa ho sempre osservato con dispiacere, che molti Matematici, anche di quelli, che illustrano l' Arte loro, e onorano l' umanità, seguono di troppo quel corrotto modo di scrivere, e diminuiscono la gloria propria per non esporre i loro ritrovamenti con quella precisione ed evidenza, che persuada ed appaghi la mente di chi ne intraprende lo studio. Nè per iscusare il mancamento di loro, e convertirlo ad onore, mi si dica quello, che asserisce un eloquente Oratore Francese nell' Elogio del più celebre Filosofo della sua Nazione; cioè che gli uomini sommi, avvezzi a scorrere con indicibile

celerità spazj immensi col loro prontissimo ingegno, non osservando minutamente tutte le linee che vi son di mezzo, debbono di necessità nelle Opere loro riuscire confusi, e quasi agli altri inintelligibili; mentre questo sentimento, che pare a prima vista sublime, e ancora verace, quando lo si applichi agli uomini illustri (*) di cui egli favella, si ritrova poi erroneo e fallace, quando sia considerato più attentamente, e senza particolarizzare: poichè altro è inventare, altro è scrivere le cose inventate; e s' è vero, che in prima appariscano di lancio a grand' Ingegni molte verità senza aver bisogno di passare per le intermedie, è certo altresì, che dappoi possono eglino, per dichiararle con chiarezza ed evidenza, usare, volendo, del vero metodo Matematico. Ne sia pruova l' immor-

(*) Newton e Cartesio.

immortale nostro Galileo, il quale seppe maestrevolmente congiungere insieme rara felicità nelle invenzioni, e somma esattezza nell' esporre le cose inventate.

Un altro genere di brevità s' è introdotto nelle Opere di alcuni Matematici de' nostri tempi, e consiste in adoperare per tutto calcoli e dimostrazioni algebraiche; nel qual numero metto anche quelle, che tengono bensì un certo stile geometrico, ma ciò nulla ostante son piene di termini e modi proprj all' Algebra sola. Queste dimostrazioni però, ad onta della loro brevità, non sono di natura tali da poter uguagliarsi, non che preferirsi alle geometriche; anzi queste ultime tanto più persuadono e convincono, che non credo vi sia alcuno, il quale voglia altrui dar a credere poter le une alle altre essere indifferentemente sostituite. Nelle sole produzioni dell' Algebra conviene valersi del metodo suo proprio, ma in tutte le altre parti delle Mate-

mati-

matiche, dove ſi chiamino in ſoccorſo la Geometria e l' Algebra, queſta dee appianare la ſtrada alle invenzioni, e quella ha da ſervire a ordinare e dimoſtrare le coſe ritrovate, quando pure le ſue forze vi aggiungano. Se ſi deggiono per tanto evitare le dimoſtrazioni algebraiche, quando ve ne poſſano eſſere di ſintetiche; quanto mai irregolarmente operano coloro, che trattano con l' Analiſi le ſteſſe materie mere Geometriche, de' quali non n' è così ſcarſo il numero?

Si ritrova un Eſempio di quanto poſſa eſſere diminuito il pregio di un' Opera, così da quella compendioſa maniera di ſcrivere, della quale abbiamo in prima ragionato, come da queſto grande prurito d' introdurre l' Algebra, ove ella male vi ſtia, in un Opuſcolo poſtumo del Cramer, *inſerito negli Atti dell' Accademia di Berlino dell' anno mille ſettecento e cinquanta due, dove queſti cerca di dare una dimoſtrazione dell' egregio Teo-*

rema

rema Geometrico, *che* il massimo de' Poligoni, da qualsivoglia numero di linee rette date descritto, è quello d' intorno a cui si può circonscrivere un cerchio. *Quindi è, che la dimostrazione prodotta dal celebre Autore riesce imperfetta e mancante, prima perchè suppone la risoluzione di uno de' più difficili Problemi di Geometria, che le serve per fondamento, poi perchè trascura gli altri casi del Teorema considerandone un solo, e finalmente perchè non è puramente geometrica, come può convincersi col fatto ogni buon Geometra, che voglia con diligenza esaminarla.*

Mi sembrò per altro sì eccellente questo Teorema, che avendone io ritrovata una dimostrazione affatto nuova e geometrica, così ho risoluto di presentarla al pubblico in quest' Opuscolo, divisa in molte proposizioni, e dichiarata con rigoroso stile Geometrico.

All' Opuscolo ho unito un' Appendice, dove

ve si vedrà tra le altre cose, qual uso possa avere nella Geometria solida Elementare quel Problema medesimo, ch' è stato ommesso dal Cramer, *a cui lascio però il merito di essersi, egli prima di ogni altro, dato a scrivere intorno a un sì generale ed eccellente Teorema, anzi di averne data una, qualunque poi ella si sia, dimostrazione.*

PRO-

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

DAta una linea retta ſegata in diſuguali ſegamenti, prolungarla in modo, che tutta con l'aggiunta all' aggiunta abbia la ſteſſa ragione, che hanno i ſegamenti fra di loro.

Sia data la linea retta AC ſegata in diſuguali ſegamenti nel punto B, e il ſegamento AB ſia maggiore: biſogna prolungare talmente la AC, che tutta la AC con l' aggiunta all' aggiunta abbia la ſteſſa ragione, che il ſegamento AB al ſegamento BC.

Si prolunghi la AC dalla parte del ſegamento minore BC, e dal ſegamento maggiore AB ſi tolga la BD uguale alla BC; e poi ſi faccia come la AD al-

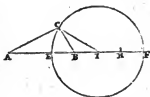
la DB, così la AC alla CE, e la CE si metta per diritto alla AC.

E poichè è come la AD alla DB, così la AC alla CE, sarà componendo come la AB alla BD, così la AE alla EC; la BD poi è uguale alla BC, dunque come la AB alla BC, così è la AE alla EC; e però si è prolungata la AC in E in modo, che tutta la AE alla EC ha la ragione del maggior segamento AB al minore BC; il che si doveva fare.

Teorema I. Proposizione II.

Se una linea retta, segata in disuguali segamenti, sia prodotta in modo, che tutta con l' aggiunta all' aggiunta abbia la stessa ragione, che hanno i segamenti fra loro; e sulla linea intercetta fra il punto della sezione e l' estremità del prolungamento sia descritto un cerchio, alla cui circonferenza vengano prodotte a qualsivoglia punto di essa due linee rette dai termini della prima retta linea, avranno queste la proporzione medesima, che hanno fra di loro le parti

parti di essa linea data, sicchè omologhe sieno quelle, che si partono dai medesimi termini.

La linea retta AB sia segata in E in disuguali segamenti, de' quali AE sia maggiore; e si prolunghi la AB in F, cosicchè sia il segamento AE al segamento EB (*Prop.1.*) come la AF alla FB, e sopra la EF come diametro si descriva il cerchio CEF, nella di cui circonferenza preso qualunque punto C si uniscano le AC CB: dico che come la AE alla EB, così è la AC alla CB.

Imperciocchè si prenda il centro I del cerchio CEF, si unisca la CI, e si faccia la IH uguale alla IB. E poichè la EI è uguale alla IF, e la BI alla IH, sarà la rimanente FH uguale alla rimanente EB; e però la BH è l'eccesso, nel quale la FB supera la EB. In oltre perchè la AF alla FB è come la AE alla EB: sarà permutando la FA alla AE come la FB alla BE; e dividendo la FE alla EA, come l'eccesso nel quale la FB supera la BE, cioè la BH, alla BE, e invertendo la AE alla EF come la EB alla BH; e prendendo le metà de' conseguenti, la AE alla EI, come la EB

 alla

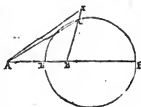
alla BI; e componendo la AI alla IE, come la IE alla IB; ma la IE è uguale alla IC: dunque la AI alla IC come la IC alla IB; laonde i triangoli CIA CIB, che hanno l'angolo CIA comune, hanno d'intorno ad esso i lati proporzionali; e però il triangolo CIA è equiangolo al triangolo CIB, e sarà la AC alla CB come la AI alla IC, ovvero alla IE. Oltre a ciò essendosi dimostrato che la AE alla EI è come la EB alla BI: sarà permutando come la AE alla EB, così la EI alla IB, ovvero la AI alla IE; e parimenti essendosi dimostrato, che come la AI alla IE, così è la AC alla CB: avrà dunque la AC alla CB la ragione medesima della AE alla EB; il che conveniva dimostrare. (*)

Teo-

(*) *Quantunque questo Teorema, siccome ancora il susseguente sieno d'invenzione del celebre Galileo Galilei, e da lui dimostrati nel primo Dialogo delle Scienze Nuove; tuttavolta essendosi qui di necessità in diverso modo enunciati, si è creduto non superfluo darne differente dimostrazione e forse non inelegante; il che servirà ancora a maggior comodo di quelli, che leggeranno il presente Opuscolo.*

Teorema II. Proposizione III.

Se una linea retta ſia ſegata in parti diſuguali, e ſieno fatte le coſe ſteſſe come nell' antecedente propoſizione; non ſi potranno condurre dall'eſtremità della linea retta data a qualunque altro punto, che non ſia nella circonferenza del cerchio deſcritto, due linee, che abbiano la ſteſſa proporzione, che hanno fra loro le parti della linea prima ſegata.

La linea retta AB ſia ſegata in parti diſuguali nel punto E, e ſia AE la parte maggiore; e ſi prolunghi la AB in F, ſicchè ſia la AF alla FB come la AE alla EB, e ſopra la EF ſi deſcriva il cerchio CEF: dico che non ſi potranno condurre da qualunque altro punto, che non ſia nella circonferenza CEF, due linee rette ai punti A B, le quali ſieno nella ragione della AE alla EB.

Imperciocchè, ſe ſia poſſibile, ſia I un altro punto fuori della circonferenza, da cui condotte le AI

IB

IB sia la AI alla IB, come la AE alla EB: e si unisca la AC.

E poichè è come la AE alla EB, così la AI alla IB; e come la AE alla EB, così è ancora (*Prop.2.*) la AC alla CB: sarà la AI alla IB come la AC alla CB. Di nuovo perchè la AE è maggiore della EB, sarà anche la AI maggiore della IB, e perciò l' angolo IBA è maggiore dell' angolo IAB: due angoli poi di un triangolo sono minori di due retti; dunque l' angolo IAB è sempre acuto. Per la stessa ragione è acuto l' angolo CAB. In conseguenza IAB CAB sono due triangoli, che hanno un angolo IBA comune, e d' intorno ad altro ed altro angolo hanno i lati AI IB proporzionali ai lati AC CB, e gli angoli rimanenti al punto A della stessa spezie, cioè amendue acuti: dunque i triangoli saranno equiangoli, e saranno uguali quegli angoli, che sono sottesi ai lati omologhi; e perciò l' angolo IAB è uguale all' angolo CAB, il maggiore al minore, il che non può darsi; laonde non è come la AI alla IB, così la AE alla EB. Similmente si dimostrerà di qualunque altro punto, che non sia nella circonferenza del cerchio CEF; come era da dimostrarsi.

Problema II. Proposizione IV.

Dato un cerchio e due punti di posizione, comunque si voglia, ritrovare, se nella circonferenza del cerchio vi sia un punto, da cui condotte linee rette ai punti dati, sieno queste in una data ragione.

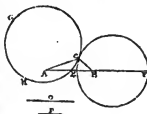
Sia dato il cerchio CGH e i due punti di posizione A B, e la ragione data sia quella della O alla P: ritrovare se nel cerchio CGH vi sia un punto, da cui condotte linee rette ai punti A B, sieno queste in ragione della O alla P.

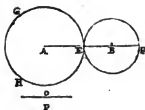
Si unisca la AB, e si seghi in E in ragione della O alla P, e sia la AE omologa alla O: Sia poi la O maggiore della P; sarà anche la AE maggiore della EB. Si prolunghi pertanto la AB nel punto F in modo, che come la AE alla EB, (*Prop.1.*) così sia la AF alla FB, e sopra la EF si descriva il cerchio CEF, il quale primieramente seghi il cercsiio CGH nel punto C, e si tirino le AC CB.

E poi-

E poichè la retta linea A B segata nel punto E in parti disuguali, si è prolungata in F talmente, che la AF alla FB è come il segamento AE al segamento EB, e sopra la EF si è descritto il cerchio CEF, nella cui circonferenza preso il punto C, si sono da esso ai punti A B condotte le rette linee AC CB: saranno queste (*Prop.2.*) in ragione della AE alla EB; come poi la AE alla EB, così è la O alla P; laonde la AC è alla CB come la O alla P; e perciò nella circonferenza del cerchio CGH si è ritrovato il punto C, da cui condotte ai punti dati A B due linee rette, sono in ragione data della O alla P. Ed è manifesto ancora, che i punti C sono due; perchè il cerchio sega il cerchio in due punti.

Se poi il cerchio CEF tocchi il cerchio CGH, come in questa figura, e si conducano al punto C del toccamento le rette AC CB, si dimostrerà come prima, che avranno esse la ragione della O alla P, e il punto C sarà un solo.

Ma

Ma è vero altresì, che se la posizione de' punti A B fosse tale, che la linea, la quale gli unisce, passasse per amendue i centri de' cerchj, e il punto E cadesse nella circonferenza del cerchio da-

to, come nella terza figura, in questo caso, dopochè i due cerchj si toccherebbono nel punto E, le rette linee, che dal punto E fossero tirate ai punti A B sarebbono esse medesime le AE EB, come quelle, che hanno fra di loro la ragione della O alla P.

Se finalmente il cerchio CEF non seghi, nè tocchi il cerchio CGH, è manifesto (*Prop.3.*), che nella circonferenza CGH non può essere alcun punto, a cui pervengano dai punti dati A B due linee rette nella data ragione di O a P.

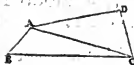
Corollario.

Da tutto ciò ne segue, che se de' due punti dati; qualunque sia la posizione del punto A, (*Fig.1.della Prop.*), la posizione del punto B sia fuori del cercio dato CGH; e segata la AB in E, onde sia il segamento AE al segamento EB come la maggiore O alla minore P, cada il punto E dentro al cerchio medesimo; in

questo caso siccome ancora il punto F cadrà fuori del cerchio CGH, così il cerchio CEF, descritto sul diametro EF, segherà il cerchio CGH; in cui per conseguenza sarà possibile ritrovare il punto C, dal quale ai punti A B tirate le AC CB sieno in ragione della O alla P.

Teorema III. Proposizione V.

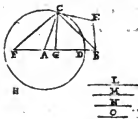
Tre lati di un quadrilatero, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.

Sia il quadrilatero ABCD: dico, che tre lati del quadrilatero ABCD, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente. Si unisca la AC.

E poichè dal triangolo ADC i due lati DC DA sono maggiori del rimanente AC; si ponga comune la AB, saranno le tre CD DA AB maggiori delle CA AB; ma le CA AB sono maggiori della CB; molto più dunque le CD DA AB sono maggiori della CB. In modo simile si proverà, che le rette DA AB BC sono maggiori della CD, le AB BC CD maggiori della AD, e le BC CD DA maggio-

maggiori della rimanente AB; e perciò tre lati di un quadrilatero, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.

PROBLEMA III. PROPOSIZIONE VI.

Da quattro linee rette, uguali a quattro linee date, costruire un quadrilatero a cui si possa circonscrivere un cerchio; ma bisogna, che tre di esse prese in qualsivoglia modo sieno maggiori della rimanente, perchè tre lati di un quadrilatero presi in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente.

Sieno date le quattro linee rette L M N O, tre delle quali prese in qualsivoglia modo sieno maggiori della rimanente; e sieno disposte in modo che la L sia maggiore di tutte, la M non minore della N, e la N della O: bisogna da quattro linee rette uguali alle L M N O costruire un quadrilatero, d' intorno a cui si possa circonscrivere un cerchio.

 Si

Si esponga una retta linea AB uguale alla maggiore L, e si tolga da essa la AD uguale alla seconda M; e col centro A ed intervallo AD descritto il cerchio CDH, il punto B cadrà manifestamente fuori di esso; e prolungata la BA in F, si faccia come la N alla O, così la DA alla AF; anche la DA non sarà minore della AF, e il punto F non cadrà fuori del cerchio. Di poi tutta la FB si seghi nel punto G, cosicchè la FG alla GB abbia la ragione della M alla N; e pel Lemma infrascritto si dimostrerà, che il punto G cade dentro al cerchio CDH: s'è poi veduto, che il punto B cade fuori del medesimo: dunque si potrà (*Cor. della Prop. 4.*) nella circonferenza del cerchio CDH ritrovare un punto, da cui condotte la FC CB, sieno in ragione di FG a GB o di M a N. Ritrovisi, e sia il punto C; e unita la AC, sopra la CB si costituisca il triangolo CEB simile al triangolo CAF, sicchè il lato CB sia omologo al lato CF, il lato CE al lato CA, e il lato BE al lato AF: sarà l' angolo CEB uguale all'angolo CAF.

Essendo pertanto, per la similitudine de' triangoli, come FC a CB, così AC a CE; e come FC a CB, così è M a N: sarà come AC a CE così la M alla N; ma la AC, ovvero la AD, è uguale alla M: dunque la CE è uguale alla N. Di nuovo perchè come la CA alla AF, così è la CE alla EB;

e per

e per costruzione la AC ovvero la AD alla AF ha la ragione della N alla O: sarà la CE alla EB, come la N alla O; ma la CE è uguale alla N: laonde ancora la EB sarà uguale alla O; e perciò le quattro BA AC CE EB sono uguali alle quattro L M N O. E perchè gli angoli CAF CAB sono uguali a due retti, e l' angolo CEB è uguale all' angolo CAF: saranno ancora uguali a due retti gli angoli CEB CAB, e conseguentemente anche li rimanenti ACE ABE del quadrilatero ACEB. Se dunque d' intorno al triangolo ACB si circonscriva un cerchio, passerà anche pel punto E, e il quadrilatero ACEB sarà inscritto in un cerchio; e però da quattro linee rette BA AC CE EB uguali alle quattro linee date L M N O si è costruito il quadrilatero ACEB d' intorno a cui si può descrivere un cerchio, il che bisognava fare. (*)

LEMMA

(*) *Il Celeb. Cramer, che, come ho nella Prefazione dichiarato, è stato il primo a versare sull' Eccellente Teorema, che forma il principal oggetto di quest' Opuscolo, suppone ritrovata la risoluzione del Probl. sopra enunciato; il che, oltre di essere contrario a quel rigoroso metodo, che debbono seguire li Geometri, esclude ancora cosa per se stessa interessante, e che può avere qualche uso negli Elementi della Geometria, come dimostrerò nell' Appendice.*

L E M M A.

Che poi il punto G cada dentro del cerchio CDH ſi dimoſtra nel ſeguente modo.

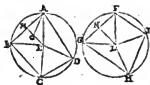
Eſſendo la FG alla GB come la M alla N, e la M non è minore della N: ancora la FG non ſarà minore della GB, e neppur ſarà minore della metà della FB. Si è poi dimoſtrato, che ancora la AD non è minore della AF, e la AB è maggiore della DA: dunque la AB ſarà maggiore della FA; laonde la FA è minore della metà della FB; e la FG non è minore della metà della FB; e però la FG è maggiore della FA, e il punto G cadrà di là dal punto A verſo D. Oltre a ciò eſſendo la DA, o ſia la M, alla AF, come la N alla O: ſarà permutando come la M alla N, così la AF alla O; ma come la M alla N, così è la FG alla GB: dunque come la FG alla GB, così la AF alla O; e invertendo, e componendo come la BF alla FG, così la O con la AF alla AF. Di nuovo perchè invertendo come la N alla M, così ſta la O alla AF, ſarà componendo come la N con la M alla M, così la O con la AF alla AF; e come uno degli antecedenti ad uno de' conſeguenti, così tutti gli antece-

tecedenti a tutti li conseguenti: sarà come la O con la AF alla AF, così le O N M AF, alle M AF, o sia alla DF; ma come la O con la AF alla AF, così s'è dimostrato la BF alla FG: dunque come la BF alla FG, così sono le O N M AF alla DF; ma se la prima sia minore della terza, eziandìo la seconda è minor della quarta; e la prima BF è minore della terza O M N AF (avvegnachè tolta la comune AF, la rimanente AB, cioè la L, sia minore delle O M N): dunque ancora la FG sarà minore della FD; e tolta la comune FA, la rimanente AG sarà minore della rimanente AD; per la qual cosa il punto G cadrà dentro del cerchio; il che occorreva dimostrare.

Teorema IV. Proposizione VII.

Se da rette linee, quante si vogliano, sia descritto un poligono, d'intorno a cui possasi circonscrivere un cerchio, in qualunque modo si rispondano esse fra di loro, la superficie del proligono sarà sempre la stessa.

Da

Da quattro linee rette date sieno descritti i due quadrilateri ABCD FGHI tali, che d'intorno a ciascuno di essi possasi circonscrivere un cerchio, e sia la AB uguale alla FG, la AD alla GH, la DC alla FI, e la CB alla IH: dico che il quadrilatero ABCD è uguale al quadrilatero FGHI.

Imperciocchè all'uno e all'altro di essi si circonscrivano i cerchj ABCD FGHI; e presi di questi i centri EL si unìscano la EA EB EC ED, LF LG LH LI.

Dico primieramente, che li raggj AE FL de' cerchj sono uguali. Poichè se non è così, uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore lo AE, e dalli punti E L si conducano le EM LN perpendicolari alle AB FG le quali saranno divise per mezzo ne' punti M N, onde la AB sarà doppia della AM, e la FG della FN; la AB poi è uguale alla FG; dunque anche la AM è uguale alla FN. Di nuovo perchè la AE è maggiore della FL sarà il quadrato della AE maggiore del quadrato della FL; ma al quadrato della AE sono uguali li quadrati delle AM ME, e al quadrato della FL sono uguali li quadrati delle FN NL: dunque li quadrati delle AM ME sono maggiori delli quadrati delle FN NL,

de' qua-

de' quali il quadrato della AM è uguale al quadrato della FN; dunque il quadrato rimanente della ME è maggiore del quadrato rimanente della NL, e perciò la ME maggiore della NL. Si tolga dalla ME la MO uguale alla NL, e si unisca la AO.

E poichè le AM MO sono uguali alle FN NL e l'angolo retto AMO è uguale all'angolo retto FNL, sarà il triangolo AMO uguale al triangolo FNL, e perciò l'angolo AOM sarà uguale all'angolo FLN; ma l'angolo AOM esteriore è maggiore dell'interiore ed opposto AEM, dunque anche l'angolo FLN è maggiore dell'angolo AEM; e in conseguenza l'angolo pure FLG, ch'è doppio del primo, sarà maggiore dell'angolo AEB doppio del secondo. Allo stesso modo si dimostrerà l'angolo FLI maggiore dell'angolo DEC, l'angolo ILH maggiore dell'angolo BEC, e l'angolo GLH dell'angolo AED; laonde i quattro angoli FLG FLI ILH GLH sono maggiori dei quattro AEB AED DEC CEB; ma quelli sono uguali a quattro retti, dunque gli angoli AEB AED DEC CEB sono minori di quattro retti; e sono ancora uguali, il che non può essere: non è dunque la AE disuguale della FL, e perciò le sarà uguale. Perchè poi ancora la EB è uguale alla LG, e la base AB alla base FG, il triangolo AEB sarà uguale al triangolo FLG. Similmente si dimostrerà il triangolo AED

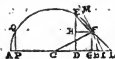
ugua-

uguale al triangolo GLH, il triangolo DEC al triangolo FLI; e il triangolo BEC al triangolo HLI; laonde tutto il quadrilatero ABCD è uguale al quadrilatero FGHI; il che ſi doveva dimoſtrare.

Problema V. Proposizione VIII.

Se in un ſemicerchio ſieno condotte due linee rette perpendicolari al diametro, e diſugualmente diſtanti dal centro; la differenza delle loro diſtanze dal centro, alla differenza di eſſe linee rette, avrà maggior ragione della linea retta minore alla ſua diſtanza, e minor ragione della linea maggiore alla ſua diſtanza corriſpondente.

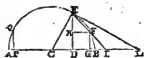
Sieno nel ſemicerchio AEFB, il cui centro è il punto C e la AB il diametro, condotte le linee rette ED FG perpendicolari al diametro, e diſugualmente diſtanti dal centro, e per F ſi conduca la FH parallela alla AB, coſicchè ſia EH la differenza delle linee ED FG, ſiccome DG

è la

è la differenza delle loro distanze CG CD dal centro: dico primieramente, che HF ad HE ha maggior ragione della linea retta minore FG alla sua corrispondente distanza GC.

Imperciocchè si uniscano le CF EF e si prolunghi la EF fino a che concorri in L col diametro AB pure prolungato, e per F si conduca la MFI ad angoli retti alla CF, la quale toccherà il semicerchio nel punto F.

Pertanto poichè l' angolo CFM è retto, sarà minor del retto l'angolo EFC, laonde sarà maggior del retto l'angolo CFL che assieme con CFE è uguale a due retti; per conseguenza l'angolo CFL è maggiore dell'angolo CFI, e il punto I, ove concorre la tangente col diametro prolungato, cadrà tra i punti B L, sicchè la GL sarà maggiore della GI. Perchè dunque la GL è maggiore della GI, avrà la GL alla GF maggiore ragione della GI alla stessa GF; ma come GL a GF, così è la FH alla HE per la somiglianza de' triangoli FGL EHF; e come la GI alla GF, così è la GF alla GC, avvegnachè dal vertice F dell'angolo retto CFI siasi condotta la FG perpendicolare alla base: dunque ancora la FH alla HE ha maggiore ragione della FG alla GC.

 Dicò

Dico in oltre che la FH alla HE ha minor ragione della linea maggiore ED alla sua corrispondente distanza CD.

Poichè nella seconda Figura si unifcano le CE EF, e la EF si prolunghi fino in I come prima, e dal punto E si conduca ad angoli retti alla CE la EL, che toccherà il semicerchio. E perchè l'angolo CEL è retto, ed è minor del retto l'angolo CEI, cadrà il punto L oltre il punto I, e perciò sarà la DI minore della DL; laonde la DI alla DE avrà minor ragione della LD alla DE; ma come la DI alla DE, così per la somiglianza de' triangoli IDE FHE, è la retta FH alla HE; e come la LD alla DE, così è la DE alla DC; dunque ancora la FH alla HE ha minor ragione della ED alla DC.

Ma una delle linee ED sia da una parte del centro, e la PQ dall'altra (come nell'una, e nell'altra Figura) e fatta la CG uguale alla CP, e condotta la GF perpendicolare e la FH parallela al diametro AB, anche la GF sarà uguale alla PQ, e la FH sarà la differenza delle distanze CD CP dal centro, come la EH la differenza delle perpendicolari ED PQ; e in modo simile di prima si dimostrerà che la FH alla HE ha maggior ragione della FG

alla

alla GC, o ſia della QP alla PC, e minore della ED alla DC; il che era da dimoſtrarſi.

Teorema VI. Proposizione IX.

Se vi ſieno due quantità quali ſi vogliano, e ad una ſi tolga manco di quello, che all' altra ſi aggiunge; ſarà la ſomma delle prime quantità minore della ſomma delle quantità ſeconde.

La dimoſtrazione di queſto Teorema, non meno che quella del ſuſſeguente è per ſe ſteſſa manifeſta.

Teorema VII. Proposizione X.

Se vi ſieno due quantità quali ſi vogliano, e ad una ſi tolga più di quello, che all' altra ſi aggiugne; ſarà la ſomma delle prime quantità maggiore della ſomma delle quantità ſeconde.

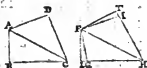
Teo-

Problema VIII. Proposizione XI.

Il massimo de' quadrilateri da quattro linee rette date descritto, è quello, d'intorno a cui si può circonscrivere un cerchio.

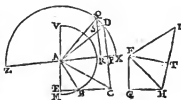
Sieno le quattro linee rette date AB BC CD DA e da esse si descriva il quadrilatero ABCD d'intorno a cui possasi circonscrivere un cerchio (*Prop.6.*): dico, che il quadrilatero ABCD è maggiore di tutti quelli, che dalle medesime linee rette possono essere descritti.

Imperciocchè si costruisca qualunque altro quadrilatero FGHI, d'intorno a cui non possasi circonscrivere un cerchio; e sia la FG uguale alla AB, la GH alla BC, la HI alla CD, e la FI alla AD.

E poichè ABCD è un quadrilatero, d'intorno a cui si può circonscrivere un cerchio, gli angoli opposti ABC ADC saranno uguali a due retti; se dunque l'angolo ABC è retto (come nella figura prima), sarà retto anche l'angolo ADC, e le AB AD saranno perpendicolari alle BC CD: dunque le

le FG FI non sono perpendicolari alle GH HI. Poichè, se sia possibile, la FG sia perpendicolare alla GH; e si tirino le rette AC FH. Perchè dunque le due AB BC sono uguali alle due FG GH, e l' angolo ABC retto è uguale al retto FGH; sarà la base AC uguale alla base FH. Di nuovo essendo le due AD DC uguali alle due FI IH, e la base AC uguale alla base FH: sarà l' angolo ADC uguale all'angolo FIH; ma l' angolo ADC è retto: laonde è retto ancora l' angolo FIH. Per la qual cosa il cerchio descritto sul diametro FH passerà per gli punti G I; e però il quadrilatero FGHI sarà descritto in un cerchio; il che non si pone. Niuno adunque degli angoli FGH FIH è retto, e conseguentemente niuna delle rette FG FI è perpendicolare alle GH IH. Si tirino dal punto F le FL FT perpendicolari alle alle GH IH: e perchè al maggior angolo è sottoposto il maggior lato, le FG FI, ovvero le AB AD saranno maggiori delle FL FT. Li triangoli dunque ABC ADC avendo le basi BC CD uguali alle basi GH HI, e le altezze AB AD maggiori delle altezze FL ET delli triangoli FGH FIH; saranno quelli maggiori di questi. Ma li triangoli ABC ADC costituiscono il quadrilatero ABCD, e li triangoli FGH FIH costituiscono il quadrilatero FGHI: dunque il quadrilatero ABCD è maggiore del

del quadrilatero FGHI. Lo ſteſſo ſi proverà, ſe ſieno retti amendue gli angoli BAD BCD.

Ma non ſieno retti gli angoli ABC ADC: neceſſariamente uno ſarà ottuſo, e l'altro acuto. Sia ottuſo l'angolo ABC, e prolungata la BC in E, dal punto A ſi tirino le AE AP perpendicolari alle CBE CD; e ſia primieramente retto l'angolo FGH, come nella ſeguente figura.

E poichè le due AB BC ſono uguali alle due FG GH, e l'angolo ottuſo ABC è maggiore del retto FGH; ſarà la baſe AC maggiore della baſe FH: ma le due AD DC ſono uguali alle due FI IH; e perciò l'angolo ADC è maggiore dell'angolo FIH; l'angolo poi ADC è acuto: dunque ſarà acuto anche l'angolo FIH, e la perpendicolare FT cadrà ſotto l'angolo FIH. E perchè gli angoli PDA PAD ſono uguali ad un retto, e ſono uguali ad un retto ancora gli angoli TIF TFI; l'angolo poi PDA ſi è dimoſtrato maggiore dell'angolo TIF: ſarà il rimanente PAD minore del rimanente TFI. Pertanto alla data retta linea AP e al punto A dato in eſſa ſi coſtruiſca l'angolo PAQ uguale all'angolo TFI, e ſi faccia

la

la AQ uguale alla AD, e col centro A e cogl' intervalli delle AD AB descritti i semicerchj ZQX VBM, si prolunghino le AP AE ne' punti X Z, M V; e pel punto Q si conduca la QR parallela alla DC, e per D la DS parallela alla AX.

E perchè l'angolo QAR è uguale all'angolo IFT, e il retto ARQ è uguale al retto FTI, ed in oltre il lato AQ è uguale al lato FI; sarà il triangolo QAR uguale al triangolo IFT, e perciò la AR uguale alla FT, e la QR alla IT. Di nuovo perchè sono uguali a due retti gli angoli ABC ABE, non meno che gli angoli ABC ADC, saranno i primi uguali a' secondi, e tolto il comune ABC resterà l'angolo ABE uguale all'angolo ADC; il retto poi AEB è uguale al retto APD: dunque il triangolo AEB è simile al triangolo APD; e però come la BE alla EA, così è la DP alla PA. Di nuovo ancora, essendo come ME ad EB, così BE ad EV, e BE ad EV ha minor ragione della BE alla EA (perchè la EV è maggiore della EA), avrà altresì la ME alla EB minor ragione della BE alla EA, ovvero della DP alla PA. Ed essendosi nel semicerchio ZQX condotte le QR DP perpendicolari al diametro ZX e disugualmente distanti dal centro (*Prop.*8.), la DS (differenza delle distanze) avrà alla QS (differenza delle linee perpendicolari) maggior ragione della perpendicolare minore DP al-

F la sua

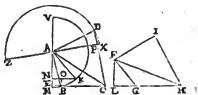
la ſua corriſpondente diſtanza PA; e perciò la DP alla PA avrà minor ragione della DS alla QS: ma ſi è dimoſtrato che la ME alla EB ha minor ragione della DP alla PA; laonde la ME alla EB avrà molto minor ragione della DS alla QS, e permutando la ME alla DS, ovvero alla RP, avrà minor ragione della EB alla QS. E poichè, per la Propoſizione XII del ſecondo degli Elementi, il quadrato della AC è uguale ai quadrati delle AB BC inſieme col doppio rettangolo compreſo dalle CB BE; e il quadrato della FH è uguale ai quadrati delle FG GH; i quadrati poi delle AB BC ſono uguali ai quadrati delle FG GH; dunque il quadrato della AC ſarà maggior del quadrato della FH, quanto è il doppio rettangolo compreſo dalle CB BE. In modo ſimile, per la XIII del medeſimo, ſi dimoſtrerà, che il quadrato della AC è maggiore del quadrato della FH, quanto il doppio rettangolo compreſo delle HI IT è maggiore del doppio rettangolo compreſo dalle CD DP: la HI poi è uguale alla CD e la IT alla QR; dunque il quadrato della AC è maggiore del quadrato della FH, quanto il doppio rettangolo compreſo dalle CD QR è maggiore del doppio rettangolo compreſo dalle CD DP, ovvero del doppio rettangolo compreſo dalle CD QS (eſſendo QS la differenza fra le QR DP); ſi è poi ſuperiormente dimoſtrato, che il qua-

drato

drato della AC è ancora maggiore del quadrato della FH, quanto è il doppio rettangolo compreſo dalle CB BE; laonde il doppio rettangolo dalle CB BE compreſo è uguale al doppio rettangolo compreſo dalle CD QS, e il ſemplice al ſemplice: e perciò la EB alla QS ha la ſteſſa ragione della CD alla CB: ma ſi è provato che la ME alla RP ha minor ragione della EB alla QS; dunque la ME alla RP ha altresì minor ragione della CD alla CB, onde il rettangolo compreſo dalle ME CB è minore del rettangolo compreſo dalle RP CD. Per la qual coſa ſe ſi prendano due quantità, cioè il rettangolo compreſo dalle AM CB inſieme col rettangolo compreſo dalle AR CD, e alla prima, cioè al rettangolo compreſo dalle AM CB ſi tolga il rettangolo minore compreſo dalla ME nella ſteſſa CB; e alla ſeconda, cioè al rettangolo compreſo dalle AR CD, ſi aggiunga il rettangolo maggiore compreſo dalla RP nella ſteſſa CD, ſiccome il rettangolo compreſo dalle AE CB è uguale alla differenza de' primi, e il rettangolo di AP in CD alla ſumma de' ſecondi; ſarà (*Prop.9.*) il rettangolo compreſo dalle AM CB inſieme col rettangolo compreſo dalle AR CD, minore della ſomma de' rettangoli compreſi dalle AE CB, e dalle AP CD; le AM CB AR CD ſono poi uguali alle FG GH FT HI: dunque la ſomma de' rettangoli compreſi

 dalle

dalle FG GH, e dalle FT HI è minore della ſomma de' rettangoli compreſi dalle AE CB, e dalle AP CD; e per conſeguenza il quadrilatero FGHI, ch'è la metà della ſumma de' primi rettangoli, ſarà minore del quadrilatero ABCD, ch'è la metà della ſumma de' rettangoli ſecondi; laonde il quadrilatero ABCD è maggiore del quadrilatero FGHI.

Ma ſia retto l'angolo FIH, e in conſeguenza maggiore dell' angolo ADC, come in queſta figura; ſarà la FH maggiore della

AC, e l'angolo FGH maggiore dell' angolo ABC: ma l'angolo ABC è ottuſo; dunque ſarà ottuſo anche l'angolo FGH. Perchè poi gli angoli FGH FGL ſono uguali agli angoli ABC ABE, de' quali l'angolo FGH è maggiore dell' angolo ABC, ſarà l' angolo rimanente FGL minore del rimanente ABE; e però l'angolo LFG ſarà maggiore dell'angolo EAB. Pertanto alla data linea retta MA e al punto A dato in eſſa ſi coſtruiſca l' angolo MAK uguale all'angolo LFG, e col centro A e cogl'intervalli delle AB AD ſi deſcrivano li ſemicerchj VBM ZDX, e ſi conduca per K la KN paralella alla EC, e per B la BO paralella alla AM.

Si proverà come prima, che le AN NK ſono ugua-

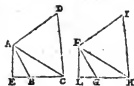
uguali alle FL LG, e che nel ſemicerchio ZDX la XP alla PD ha minor ragione della DP alla PA. Ed eſſendoſi nell'altro ſemicerchio VKM condotte le BE KN perpendicolari al diametro, la BO alla OK avrà maggior ragione della BE alla EA, ovvero della DP alla PA; ma la XP alla DP ha minor ragione della DP alla PA, e però la DP alla PA ha maggior ragione della XP alla DP; laonde la BO alla OK ha molto maggior ragione della XP alla DP, e permutando la BO alla XP ha maggior ragione della OK alla DP. In modo ſimile all' antecedente caſo dimoſtrato, ſi farà vedere, che la differenza de' quadrati delle FH AC è uguale, tanto alla differenza de' doppj rettangoli compreſi dalle NK CB e dalle NO CB, cioè al doppio rettangolo delle OK CB, quanto al doppio rettangolo compreſo dalla CD DP; dunque il rettangolo compreſo dalle OK CB è uguale al rettangolo compreſo dalle CD DP, e perciò la OK alla DP avrà la ragione medeſima della CD alla CB; ma la BO alla XP ſi è dimoſtrato aver maggior ragione della OK alla DP: laonde la BO alla XP avrà altresì maggior ragione della CD alla CB; e il rettangolo compreſo dalla BO, cioè NE, nella CB ſarà maggiore del rettangolo compreſo dalle XP CD. Onde ſe ſi prendano due quantità, cioè il rettangolo compreſo dalle AE CB e il rettangolo compre-

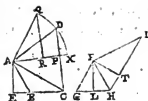
ſo

ſo dalle AP CD, e dalla prima, cioè dal rettangolo compreſo dalle AE CB, ſi tolga il rettangolo maggiore compreſo dalle NE CB, e alla ſeconda, cioè al rettangolo compreſo dalle AP CD, ſi aggiunga il rettangolo minore compreſo dalle XP CD, ſarà (*Prop.* 10.) la ſumma delle prime quantità, cioè de' rettangoli compreſi dalle AE CB, e dalle AP CD, maggiore della ſumma de' rettangoli compreſi dalle AN CB e dalle AX CD; ma le AN CB AX CD ſono uguali alle FL GH FI IH: dunque la ſumma de' rettangoli compreſi dalle AE CB e dalle AP CD è maggiore della ſumma de' rettangoli compreſi dalle FL GH e dalle FI IH; e in conſeguenza il quadrilatero ABCD è maggiore del quadrilatero FGHI. Similmente ſi dimoſtrerà il quadrilatero ABCD maggiore del quadrilatero FGHI quando ſia retto uno degli angoli GFI GHI.

S' è fin quì provato la verità della propoſta quando uno degli angoli de' due quadrilateri ABCD FGHI ſia retto. Ma ſieno ora tutti gli angoli maggiori o minori del retto. Per tanto la perpendicolare AE o è uguale, ó maggiore, ovvero minore della perpendicolare FL: dico però in primo luogo, che non può eſſere uguale quando ſia ottuſo anche

l'an-

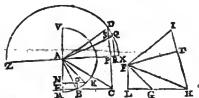
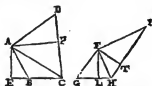
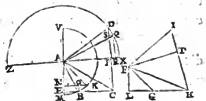
l' angolo FGH. Imperciocchè essendo la AB uguale alla FG, sarà il quadrato della AB uguale al quadrato della FG, e i quadrati delle AE EB uguali a' quadrati delle FL LG, de' quali il quadrato della AE essendo uguale al quadrato della FL, perchè la AE si pone uguale alla FL, sarà il quadrato rimanente della EB uguale al quadrato rimanente della LG; e perciò la EB uguale alla LG; è poi ancora la AE uguale alla FL, e l' angolo retto AEB uguale all' angolo retto FLG; dunque l' angolo ABE sarà uguale all' angolo FGL, e in conseguenza l' angolo ABC uguale all'angolo FGH. Di nuovo essendo le AB BC uguali alle FG GH, e comprendono angoli uguali, sarà la base AC uguale alla base FH, e il triangolo ABC uguale al triangolo FGH, come pure il triangolo ADC al triangolo FIH: sicchè tutto il quadrilatero ABCD sarà uguale e simile al quadrilatero FGHI; e perciò d'intorno al quadrilatero FGHI si potrà circonscrivere un cerchio, il che è contro la supposizione. Per la qual cosa non può la perpendicolare AE essere uguale alla perpendicolare FL essendo ottuso anche l' angolo FGH.

Sia

Sia dunque la AE uguale alla FL essendo acuto l' angolo FGH: dico che il quadrilatero ABCD è maggiore del quadrilatero FGHI.

Poichè avendo i due triangoli ABC FGH uguali basi ed altezze, sarà il triangolo ABC uguale al triangolo FGH. Di nuovo perchè le AB BC sono uguali alle FG GH, e l'angolo ABC è maggiore dell' angolo FGH, sarà la base AC maggiore della base FH: le AD DC sono poi uguali alle FI IH; dunque l' angolo ADC è maggiore dell' angolo FIH; ma l' angolo ADC è acuto; laonde sarà acuto anche l' angolo FIH, e la perpendicolare FT dee necessariamente cadere sotto l' angolo FIH; e per conseguenza l' angolo DAP, rimanente ad un retto dell' angolo ADP, sarà minore dell' angolo IFT, rimanente ad un retto dell' angolo FIT. Si faccia perciò l' angolo PAQ uguale all' angolo IFT, e col centro A ed intervallo AD si descriva l' arco QX, che incontri la AP prodotta in X, e dal punto Q si tiri la QR parallela alla CD. E' manifesto che la AR sarà uguale alla FT; ma la retta AP è maggiore della AR; dunque ancora sarà maggiore della FT, e il triangolo ADC del triangolo FIH: si è dimostrato poi, che il triangolo ABC è uguale al trian-

triangolo FIH: tutto dunque il quadrilatero ABCD è maggiore del quadrilatero FGHI.

Ma suppongasi la perpendicolare AE maggiore della perpendicolare FL. Se l'angolo FGH sia acuto, come nella presente figura, è chiaro, che il triangolo ABC sarà maggiore del triangolo FGH; e similmente di prima si dimostrerà il triangolo ADC maggiore del triangolo FIH: tutto dunque il quadrilatero ABCD è maggiore del quadrilatero FGHI. Ma l'angolo FGH sia ottuso, e fatta la AN uguale alla FL, dal punto N si conduca la NK ad angoli retti alla AN ed uguale alla LG; indi si unisca la AK: sarà la AK uguale alla FG, e l'angolo NAK uguale all'angolo LFG: e per fine col centro A ed intervallo di una di esse AB AK si descriva il semicerchio VBM.

E perchè l'angolo EAK, cioè LFG, è maggiore dell'angolo EAB, sarà l'angolo FGL minore dell'angolo ABE, e l'angolo FGH maggiore dell'angolo ABC; e perciò la base FH è maggiore della ba-

la base AC; e in conseguenza l' angolo FIH maggiore dell' angolo ADC.

Pertanto l' angolo FIH o è acuto, ovvero ottuso: si ponga prima acuto, come lo è l'angolo ADC di questa figura (*), che del caso in cui sia ottuso si parlerà di poi; onde la perpendicolare FT cadrà sotto l'angolo FIH; e perciò sarà l'angolo IFT minore dell' angolo DAP. Costruiscasi l' angolo QAR uguale all' angolo IFT, e col centro A ed intervallo della AD si descriva il semicerchio ZDX, e per Q si conduca la QR parallela alla CD, e la QS parallela alla AX: sarà dunque la AR uguale alla FT, e la QR alla IT. E perchè nel semicerchio VBM si sono condotte le due NK EB perpendicolari al diametro MV e disugualmente distanti dal centro, avrà la BO alla OK, *per la Proposizione VIII.*, maggior ragione della linea minore BE alla sua distanza corrispondente EA; la BE poi alla EA ha la stessa ragione della DP alla PA; dunque la BO alla OK ha maggior ragione della DP alla PA: ma per la Proposizione medesima la QS alla SD ha minor

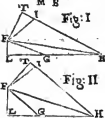
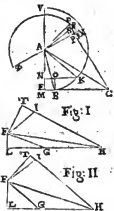
(*) *Quest' è il solo caso considerato nell' Opuscolo del Cramer: gli altri tutti sono trascurati, benchè molti di questi ricerchino una particolare dimostrazione.*

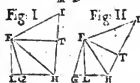
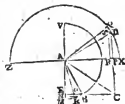
minor ragione della DP alla PA, e la DP alla PA ha maggior ragione della QS alla SD; laonde la BO alla OK ha molto maggior ragione della QS alla SD, e permutando la BO alla QS ha maggior ragione della OK alla SD. Di nuovo si dimostrerà, come in principio, che tanto il doppio rettangolo compreso dalle CB OK è uguale all' eccesso, in cui il quadrato della FH supera il quadrato della AC, quanto il doppio rettangolo compreso dalle CD SD: onde il doppio rettangolo compreso dalle CD SD sarà uguale al doppio rettangolo compreso dalle CB OK, e il semplice al semplice: sicchè sarà come CD a CB, così la OK alla SD; ma si è fatto vedere, che la BO alla QS ha maggior ragione della OK alla SD; e però BO a QS, ovvero NE a PR, avrà ancora maggior ragione della CD alla CB, e il rettangolo compreso dalle NE CB sarà maggiore del rettangolo compreso dalle PR CD. Per il che se si prendano due quantità, cioè il rettangolo compreso dalle AE CB, e il rettangolo compreso dalle AP CD; e dalla prima, cioè dal rettangolo compreso dalle AE CB, si tolga il rettangolo maggiore compreso dalle NE CB, ed alla seconda, cioè al rettangolo compreso dalle AP CD, si aggiunga il rettangolo minore compreso dalle PR CD, sarà la summa delle quantità prime (*Prop.*10.), cioè de' triangoli compresi dalle AE CB e dalle AP CD, mag-

 giore

giore della ſumma de' rettangoli compreſi dalle AN CB e dalle AR CD: le AN CB AR CD ſono poi uguali alle FL GH FT IH: dunque la ſumma de' rettangoli compreſi dalle AE CB, e dalle AP CD è maggiore della ſumma de' rettangoli compreſi dalle FL GH e dalle FT IH, e il quadrilatero ABCD ſarà maggiore del quadrilatero FGHI.

Ora per provare l' aſſunto, quando la perpendicolare AE ſia maggiore della perpendicolare FL, e eſſendo ottuſo l'angolo FGH ſia ottuſo anche l'angolo oppoſto FIH, oſſerveremo che ſe la FT, condotta perpendicolare alla HI prolungata, ſia minore della AP come nella Figura I. è evidente, ch' eſſendo il triangolo ADC maggiore del triangolo FIH, ſiccome ancora il triangolo ABC è maggiore del triangolo FGH, ſarà tutto il quadrilatero ABCD maggiore del quadrilatero FGHI: ma ſe la perpendicolare FT ſia maggiore della perpendicolare AP, come nella Figura II., fatta la AR uguale alla FT, e la RQ parallela alla CD e uguale alla TI, e coſtruita la figura; ſi dimoſtrerà, come avanti, che la BO alla QS ha maggior ragione della OK alla SD. E perchè il quadrato della FH è ugua-

è uguale ai quadrati delle FI IH col doppio rettangolo di HI in IT, cioè ai quadrati delle AD DC col doppio rettangolo di CD in QR, aggiugnendo dall' una e dall' altra parte il doppio rettangolo di CD in DP, farà il quadrato della FH insieme col doppio rettangolo di CD in DP uguale ai quadrati delle AD DC coi doppj rettangoli di CD in DP e di CD in QR; il quadrato poi della AC col doppio rettangolo di CD in DP, è uguale ai quadrati delle AD DC: laonde il quadrato della FH supera il quadrato della AC, quanto è la summa de' doppj rettangoli di CD in DP e di CD in QR. Di nuovo, perchè il quadrato della FH supera il quadrato della AC anche del doppio rettangolo di OK in CB: sarà il doppio rettangolo di OK in CB uguale ai doppj rettangoli di CD in DP e di CD in QR; e però il rettangolo semplice di OK in CB è maggiore del rettangolo semplice di CD in DP, e molto più del rettangolo di CD in DS; e per conseguenza la OK alla SD ha maggior ragione della CD alla CB; ma si è in prima detto, che la BO alla QS ha maggior ragione della OK alla SD; dunque la BO alla QS, ovvero la NE alla PR, ha molto maggior ragione della CD alla CB; e perciò il rettangolo di NE in CB è maggiore del rettangolo di PR in CD; e il resto si proverà come nel caso antecedente.

Final-

Finalmente ſia la perpendicolare A E minore della perpendicolare F L, eſſendo acuto o ottuſo l' angolo F G H, come in queſte figure. E' chiaro, che la L G ſarà minore della E B: ſi faccia la A N uguale alla F L, e ſi tiri la N K ad angoli retti alla A N ed uguale alla L G, e uniſcaſi la A K, la quale ſarà uguale all' una e all' altra delle F G A B, e l' angolo N A K ſarà uguale all' angolo L F G: di poi col centro A ed intervallo di una di eſſe A B A K ſi deſcriva il ſemicerchio V B M, e per K ſi conducano la K N K O parallele alle B E A M.

Ed eſſendo l' angolo E A B maggiore dell' angolo N A K, cioè L F G della Figura I., ſarà l' angolo A B E minore dell' angolo F G L, onde ſempre l' angolo A B C in amendue le Figure ſarà maggiore dell' angolo F G H; e le A B B C ſono uguali alle F G G H; dunque la baſe A C è maggiore della baſe F H, e per conſeguente l' angolo A D C è maggiore dell' angolo F I H; ma l' angolo A D C è acuto; dunque ſarà acuto anche l' angolo F I H; e perciò il punto T cadrà ſotto l' angolo F I H, e l' angolo D A P ſarà minore dell' angolo I F T. Si coſtruiſca l' angolo

QAP uguale all'angolo IFT, e fatta la AQ uguale ad una di esse AD FI si compia la figura.

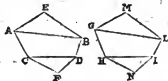
E poichè nel semicerchio MBV si sono condotte le KN BE disugualmente distanti dal centro, la KO alla OB avrà minor ragione della BE alla EA (*Prop.8.*), o sia della DP alla PA: parimenti la DS alla SQ avrà maggior ragione della DP alla PA, e però la DP alla PA avrà minor ragione della DS alla SQ; laonde la KO alla OB avrà molto minor ragione della DS alla SQ, e permutando la KO alla DS ha minor ragione della OB alla SQ. Si dimostrerà poi allo stesso modo di prima, che come la OB alla SQ, così è la CD alla CB; e perciò la KO alla DS, ovvero la NE alla PR, avrà minor ragione della CD alla CB; e per conseguenza il rettangolo compreso dalle NE CB è minore del rettangolo compreso dalle PR CD. Per la qual cosa, se dal rettangolo di AN in CB si tolga il rettangolo minore di NE in CB, ed al rettangolo delle AR CD si aggiunga il rettangolo maggiore delle RP CD, ne risulterà la somma de' rettangoli compresi (*Prop.9.*) dalle AN CB e dalle AR CD, minore della somma de' rettangoli compresi dalle AE CB e dalle AP CD; ma le AN CB AR CD sono uguali alle FL GH FT IH; dunque la somma de' rettangoli compresi dalle FL GH e dalle FT IH è minore della somma de' rettangoli com-

presi

presi dalle AE CB e dalle AP CD, cosicchè il quadrilatero FGHI sarà minore del quadrilatero ABCD, e per fine il quadrilatero ABCD maggiore del quadrilatero FGHI. Onde generalmente sarà vero, che il massimo de' quadrilateri, da quattro linee rette date descritto, è quello d' intorno a cui si può circonscrivere un cerchio, come bisognava dimostrare.

Teorema IX. Proposizione XII.

Il Massimo de' poligoni, da qualsivoglia numero di linee rette date descritto, è quello d' intorno a cui si può circonscrivere un cerchio.

Imperciocchè se non è così, sia ACFDBE il massimo poligono, che si possa da linee uguali alle AC CF FD DB BE descrivere, e li punti A C F D B E non sieno tutti nella stessa circonferenza di cerchio.

E poichè i punti A C F D B E non sono tutti nella stessa circonferenza di cerchio, vi saranno certa-

certamente quattro di essi punti, pe' quali non potrà passare un cerchio. Sieno questi punti li A C D B, e unite le AB CD, da quattro linee rette GH HI IL LG uguali alle AC CD DB BA (*Prop.6.*) si descriva il quadrilatero GHIL, d'intorno a cui possasi circonscrivere un cerchio, in modo che la GH sia uguale alla AC, la HI alla CD, la IL alla DB, e la GL uguale alla BA: indi dalla GL si descriva la figura GML uguale e simile alla figura AED, e dalla HI si descriva la figura HNI uguale e simile alla figura CFD: dunque le linee AC CF FD DB BE EA, che comprendono il poligono ACFDBE, sono uguali alle GH HN NI IL LM MG, che comprendono il poligono GHNILM; e per la supposizione il poligono ACFDBE è maggiore del poligono GHNILM.

Pertanto poichè i quadrilateri ACDB GHIL sono compresi da linee rette uguali, e d'intorno al quadrilatero GHIL si può circonscrivere un cerchio, ma non così d'intorno al quadrilatero ACDB; sarà il quadrilatero GHIL maggiore del quadrilatero ACDB: e la figura GML è uguale alla figura AEB, e la figura HNI alla CFD; dunque tutto il poligono GHNILM è maggiore del poligono ACFDBE, e però lo ACFDBE è minore di GHNILM, ed è anche maggiore; il che non può essere. Non è dunque il poligono ACFDBE il mas-

 simo,

ſimo , che ſi poſſa deſcrivere da linee uguali alle AC CF FD DB BE EA : ſimilmente ſi dimoſtrerà di qualſivoglia altro poligono, d' intorno a cui non poſſaſi circonſcrivere un cerchio; laonde il maſſimo de' poligoni, da qualſivoglia numero di linee rette date deſcritto, è quello d' intorno a cui ſi può circonſcrivere un cerchio ; come biſognava dimoſtrare.

Il Fine dell' Opuſcolo primo Geometrico.

AP-

APPENDICE

ALL' OPUSCOLO PRIMO.

Dopo di avere geometricamente dimostrato il Teorema generale, che forma il sugget- to dell' Opuscolo antecedente, mi è passato per la mente di ricercare la risoluzione di questo Pro- blema. *Dati i lati di un quadrilatero, d' intorno a cui possasi circonscrivere un cerchio, si ricerca la superficie del quadrilatero, e il raggio del cerchio circonscritto.* Ma prima di esporre quanto mi venne fatto di ri- trovare, è necessario, che richiami alla memoria di chi legge due verità dimostrate dagli Analisti.

La prima è, che se dicasi $a\ b\ u$ i tre lati di un triangolo sarà la sua area uguale a

$$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2u^2+2b^2u^2-a^4-b^4-u^4}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+u}\,.\,\overline{a+b-u}\,.\,\overline{a+u-b}\,.\,\overline{b+u-a}}$$

e però sarà uguale alla quarta parte della radice quadrata del prodotto nato dalla moltiplicazione

della somma de' tre lati, colle summe di due a due diminuite del terzo lato.

La seconda verità provata dagli Analisti è, che se dicansi a b u i lati di un triangolo, sarà il raggio del cerchio a detto triangolo circonscritto uguale a

$$\frac{a\,b\,u}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}};$$

ma $\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$

è uguale all' area del triangolo; dunque il raggio circonscritto è uguale al prodotto de' tre lati diviso per la quadrupla area del triangolo. Ciò supposto passiamo alla risoluzione del Problema citato, che per maggior chiarezza divideremo in due.

PROBLEMA I.

Dati i lati di un quadrilatero, d' intorno a cui si possa circonscrivere un cerchio, ritrovare la di lui area.

Sia ABCD il quadrilatero, d' intorno a cui si possa circonscrivere un cerchio, cosicchè gli angoli di esso op-

posti

posti sieno uguali a due retti; e sia AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$: bisogna ritrovare l' area del quadrilatero ABCD.

Si uniscano le AC BD, e si faccia la AC $= u$; e la AE $= y$: come poi la AB alla AD, così sia la DC alla BO; e la BO si metta per diritto alla CB, e si tiri la AO: sarà il rettangolo compreso dalle AB BO uguale al rettangolo di AD in DC.

E perchè l'angolo ABO è uguale all' angolo ADC, e il rettangolo compreso dalle AB BO è uguale al rettangolo compreso dalle AD DC, sarà il triangolo ABO uguale al triangolo ADC; e però come il triangolo ABC al triangolo ABO, così il triangolo ABC al triangolo ADC; ma come il triangolo ABC al triangolo ABO, così è la CB alla BO; e come la CB alla BO, così è il rettangolo di CB in BA al rettangolo di OB in BA: laonde come il rettangolo di CB in BA al rettangolo di OB in BA, ovvero al rettangolo di AD in DC, così è il triangolo ABC al triangolo ADC; e in conseguenza sostituendo le lettere per avere il valore de' rettangoli, sarà $ab : cd :: \mathrm{ABC} : \mathrm{ADC}$; sicchè $\frac{cd}{ab}\,\mathrm{ABC} = \mathrm{ADC}$, onde tutto il quadrilatero $\mathrm{ABCD} = \mathrm{ABC} + \frac{cd}{ab}\,\mathrm{ABC} = \frac{ab + cd}{ab}\,\mathrm{ABC}$. Essendo poi a b u il valore de' lati AB BC AC del trian-

golo

golo ABC, la ſua area ſarà uguale a

$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$, dunque l'area del quadrilatero ABCD

$$= \frac{ab + cd}{4ab}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}.$$

Di nuovo perchè il triangolo BAE è ſimile al triangolo EDC, ſarà come BA : EA : : CD : DE, ovvero $a : y : : c : \frac{cy}{a} = ED$; e parimenti, per la ſimilitudine de' triangoli EAD EBC, ſta DA : AE : : CB : BE, ovvero $d : y : : b : \frac{by}{d} = BE$: come poi AE : BE : : ED : EC, o ſia $y : \frac{by}{d} : : \frac{cy}{a}$: EC, dunque $EC = \frac{bcy}{ad}$; laonde tutta la AC $= AE + EC = y + \frac{bcy}{ad} = \frac{ad + bc}{ad} . y$, e tutta la $BD = BE + ED = \frac{by}{d} + \frac{cy}{a} = \frac{ab + cd}{ad} . y$. Perchè poi il rettangolo compreſo dalle AB CD inſieme col rettangolo compreſo dalle BC AD è uguale al rettangolo compreſo dalle AC BD, ſarà ſostituendo $ac + bd = \frac{\overline{ad + bc} . \overline{ab + cd}}{a^2 d^2} . y^2$, e però

$y =$

$y = ad\sqrt{\frac{ac+bd}{\overline{ad+bc}\,.\,\overline{ab+cd}}}$, e per consequenza

la AC $= \frac{ad+bc}{ad}\,.\,y = \sqrt{\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}}$

$= u$.

Ora essendosi dimostrato il quadrilatero ABCD

$= \frac{ab+cd}{4ab}\sqrt{2a^2b^2+2a^2u^2+2b^2u^2-a^4-b^4-u^4}$,

sarà, sostituendo in luogo di u il valore ritrovato, il quadrilatero ABCD

$$= \frac{ab+cd}{4ab}\sqrt{\left(2a^2b^2+\overline{2a^2+2b^2}\,.\,\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}\right.}$$

$$\overline{\left.-a^4-b^4-\frac{\overline{ac+bd}^2\,.\,\overline{ad+bc}^2}{\overline{ab+cd}^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4ab}\sqrt{\left(\overline{2a^2b^2-a^4-b^4}\,.\,\overline{ab+cd}^2+\overline{2a^2+2b^2}\,.\right.}$$

$$\overline{\left.\overline{ab+cd}\,.\,\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}-(\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc})^2\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(8abcd+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+}$$

$$\overline{2c^2d^2-a^4-b^4-c^4-d^4)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(\overline{a+b+c-d}\,.\,\overline{a+b+d-c}\,.\,\overline{a+c+d-b}\,.}$$

$\overline{\overline{b+d+c-a}\,)}$; come sperimentando si ritroverà.

In

In altro modo.

Essendo il lato AB $= a$, BC $= b$, e AC $= u$, sarà il triangolo ABC $=$

$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$, e parimenti essendo AD $= d$, CD $= c$, AC $= u$ sarà il triangolo ACD $= \frac{1}{4}\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$, e però il quadrilatero ABCD

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$$

$$+ \frac{1}{4}\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$$. Ma, *per la proposizione X. del precedente Opuscolo*, il quadrilatero ABCD, d' intorno a cui si può circonscrivere un cerchio, è il massimo, che si possa descrivere da linee uguali alle AB BC CD DA; dunque

$$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - u^4 - b^4 - u^4}$$

$$+ \frac{1}{4}\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$$

è un massimo; e differenziando sarà

$$\frac{2a^2udu + 2b^2udu - 2u^3du}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}}$$

$$+ \frac{2c^2udu + 2d^2udu - 2u^3du}{\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}} = o$$; e dividendo

dendo tutto per $2udu$ e traſportando ſarà

$$\frac{a^2 + b^2 - u^2}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}}$$

$$= \frac{-\overline{(c^2 + d^2 - u^2}}{\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}}$$

la qual' equazione dicaſi (B); e quadrando ſarà

$$\frac{2a^2b^2 - 2a^2u^2 - 2b^2u^2 + a^4 + b^4 + u^4}{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$$

$$= \frac{2c^2d^2 - 2c^2u^2 - 2d^2u^2 + c^4 + d^4 + u^4}{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$$; o ſia

$$\frac{4a^2b^2 - 2a^2b^2 - 2a^2u^2 - 2b^2u^2 + a^4 + b^4 + u^4}{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$$

$$= \frac{4c^2d^2 - 2c^2d^2 - 2c^2u^2 - 2d^2u^2 + c^4 + d^4 + u^2}{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$$; ovvero

$$\frac{4a^2b^2}{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4} - 1$$

$$= \frac{4c^2d^2}{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4} - 1$$; e

però $\frac{4a^2b^2}{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$

$1 \qquad =$

$$= \frac{4c^2d^2}{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4},$$

onde estraendo la radice quadrata, sarà

$$\frac{a\ b}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}}$$

$$= \frac{c\ d}{\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}} \quad (C);$$

e in conseguenza $\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$

$$= \frac{cd}{ab} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4};$$

laonde il quadrilatero ABCD

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$$

$$+ \frac{cd}{4ab} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$$

$$= \frac{ab + cd}{4ab} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4} \quad (D).$$

Di nuovo dall' equazione (C) si ricava, che come

$$\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4} :$$

$$\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4} :: ab : cd;$$

e dall' equazione (B), che come

$\sqrt{2a^2}$

$\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}$:
$\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2u^2 + 2d^2u^2 - c^4 - d^4 - u^4}$: : $a^2 + b^2 + u^2$:
$- \overline{c^2 + d^2 - u^2}$; e però come $ab : cd :: a^2 + b^2 - u^2 :$
$- \overline{c^2 + d^2 - u^2}$, e moltiplicando le quantità estreme e le medie della proporzione, $a^2cd + b^2cd - cdu^2$
$= -abc^2 - abd^2 + abu^2$, e però u^2

$$= \frac{a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2}{ab + cd} = \frac{\overline{ac + bd} \cdot \overline{ad + bc}}{ab + cd};$$

Si sostituisca ora questo ritrovato valore di u nell'equazione (D), e s'avrà il quadrilatero ABCD

$$= \frac{ab + cd}{4ab} \sqrt{\left(2a^2b^2 + \overline{2a^2 + 2b^2} \cdot \frac{\overline{ac + bd} \cdot \overline{ad + bc}}{ab + cd} - a^4 - b^4 - \frac{\overline{ac + bd}^2 \cdot \overline{ad + bc}^2}{\overline{ab + cd}^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{\left(\overline{a + b + c - d} \cdot \overline{a + b + d - c} \cdot \overline{a + c + d - b} \cdot \overline{b + d + c - a}\right)},$$ come prima: dal che si ricava il seguente

 Coro-

COROLLARIO.

La ſuperficie di un quadrilatero, d'intorno a cui ſi poſſa circonſcrivere un cerchio, è uguale alla quarta parte della radice quadrata del prodotto nato dalla moltiplicazione delle ſomme de' lati preſi a tre a tre diminuite del quarto lato.

ESEMPIO.

Sia AB $= a = 77$, BC $= b = 175$, CD $= c = 119$, DA $= d = 35$, ſarà $a+b+c-d = 336$, $a+b+d-c = 168$, $a+c+d-b = 56$, $b+d+c-a = 232$, e però $\overline{a+b+c-d} \cdot \overline{a+b+d-c} \cdot \overline{a+c+d-b} \cdot \overline{b+d+c-a} = 336 \cdot 168 \cdot 56 \cdot 232 = 796594176$, da cui eſtratta la radice quadrata, e preſane la quarta parte, ſi conſeguirà il numero 7056 per l'area del quadrilatero ABCD.

PROBLEMA II.

Dati i lati di un quadrilatero, d'intorno a cui si possa circonscrivere un cerchio, ritrovare il raggio del cerchio circonscritto.

Sia ABCD un quadrilatero d'intorno a cui si possa circonscrivere un cerchio, e sia $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$: bisogna ritrovare il raggio del cerchio circonscritto.

Facciasi $AC = u$. Sarà il raggio del cerchio circonscritto al triangolo ABC, e però anche quello circonscritto al quadrilatero ABCD uguale alla quantità

$$\frac{abu}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2u^2 + 2b^2u^2 - a^4 - b^4 - u^4}}.$$

Perchè poi al quadrilatero ABCD si può circonscrivere un cerchio, si ritroverà similmente come nell' antecedente Problema la

$AC = \sqrt{\dfrac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}}$, il qual valore sosti-

tuito

tuito in luogo di u nell' espressione del raggio, che dicasi R, s' avrà

$$R = ab \sqrt{\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}} :$$

$$\sqrt{\left(2a^2b^2 + \overline{2a^2+b^2}\,.\,\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}\right.}$$

$$\left. - a^4 - b^4 - \frac{\overline{ac+bd}^2\,.\,\overline{ad+bc}^2}{\overline{ab+cd}^2}\right),$$ o sia

$$R = ab \sqrt{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}} :$$

$$\sqrt{ab+cd}\,.\,\sqrt{\left(2a^2b^2 + \overline{2a^2+2b^2}\,.\,\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}\right.}$$

$$\left. - a^4 - b^4 - \frac{\overline{ac+bd}^2\,.\,\overline{ad+bc}^2}{\overline{ab+cd}^2}\right)$$

e moltiplicando tanto il numeratore, che il denominatore del secondo membro dell' equazione per

$$\frac{\sqrt{ab+cd}}{4ab},$$ s' avrà

R =

$$R = \tfrac{1}{4}\sqrt{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}\,.\,\overline{ab+cd}} :$$

$$\frac{ab+cd}{4ab}\sqrt{\left(2a^2b^2+\overline{2a^2+2b^2}\,.\,\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}\right.}$$

$$\left.-a^4-b^4-\frac{\overline{ac+bd}^2\,.\,\overline{ad+bc}^2}{\overline{ab+cd}^2}\right)$$

ma *nel Problema antecedente* si è dimostrato che

$$\frac{ab+cd}{4ab}\sqrt{\left(2a^2b^2+\overline{2a^2+2b^2}\,.\,\frac{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}}{ab+cd}\right.}$$

$$\left.-a^4-b^4-\frac{\overline{ac+bd}^2\,.\,\overline{ad+bc}^2}{\overline{ab+cd}^2}\right)$$

è uguale al quadrilatero ABCD ; dunque

$$R = \frac{\tfrac{1}{4}\sqrt{\overline{ac+bd}\,.\,\overline{ad+bc}\,.\,\overline{ab+cd}}}{ABCD}$$; il che bisognava ritrovare.

Ma tralasciando ora mai queste Analitiche considerazioni, passiamo a far vedere, come *il Problema III. della Proposizione VI. dell' Opuscolo precedente* possa avere un uso non inelegante nel libro undecimo degli Elementi della Geometria ; il che faremo dopo di aver premessi i due seguenti Teoremi.

TEOREMA I.

Se ſieno quanti angoli piani ſi vogliano, de' quali tutti gli altri ſieno mggiori, che uno, preſi in qualunque modo; e ſieno contenuti da linee rette uguali: da quelle rette, che ſono ſottopoſte a detti angoli ſi potrà coſtruire una figura di molti lati; cioè di eſſe linee, tutte le altre ſono maggiori di una, preſe in qualunque modo.

Queſto Teorema è ſtato dimoſtrato dal Commandino ne' ſuoi Commentarj al libro undecimo di Euclide, onde ne ommetteremo la dimoſtrazione.

TEOREMA II.

Se un angolo ſolido ſia compreſo da quanti angoli piani ſi vogliano, tutti gli altri ſono maggiori di uno, preſi in qualunque modo.

Sia

Sia l'angolo solido al punto A compreso da' quattro angoli piani BAC CAD DAE EAB : dico, che tre di essi

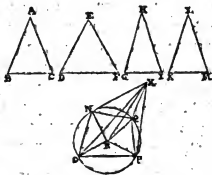
presi in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente.

Imperciocchè se gli angoli BAC CAD DAE EAB sono uguali fra di loro, è manifesto, che tre di essi presi in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente : ma se non sono uguali sia CAD il maggiore di tutti.

E poichè dell' angolo solido al punto A compreso dai tre angoli piani BAE EAD DAB, li due BAE EAD sono maggiori del rimanente DAB, si ponga comune l'angolo CAB; saranno li tre angoli CAB BAE EAD maggiori delli due angoli DAB BAC. Di nuovo perchè evvi al punto A un altro angolo solido compreso dagli angoli piani CAB BAD DAC, saranno i due angoli DAB BAC maggiori del rimanente CAD; ma ancora gli angoli CAB BAE EAD si sono dimostrati maggiori delli due angoli DAB BAC; molto più dunque gli angoli CAB BAE EAD sono maggiori dell' angolo CAD; e perciò ec.

PROBLEMA III.

Da quattro angoli piani costruire un angolo solido: ma conviene, che li quattro angoli piani sieno minori di quattro retti; e che tre di essi presi in qualsivoglia modo sieno maggiori del rimanente.

Sieno dati li quattro angoli piani BAC DEF GHI KLM, i quali sieno minori di quattro retti, e tre di essi presi in qualsivoglia modo sieno maggiori del rimanente: bisogna da angoli uguali alli BAC DEF GHI KLM costruire un angolo solido.

Si prendano uguali le BA AC DE EF GH HI KL LM, e si unisçano le BC DF GI KM: dunque delle linee BC DF GI KM tre, prese in qualsivoglia modo, sono maggiori della rimanente. Si costruisca

pertan-

pertanto da linee uguali alle BC DF GI KM il quadrilatero NOPQ (*Prop. 6. dell' Opusc.* 1.) d' intorno a cui possasi circonscrivere un cerchio, e sia la NO uguale alla BC, la OP uguale alla DF, la PQ alla GI, e la QN alla KM : poi al quadrilatero NOPQ si circonscriva il cerchio NOPQ, di cui preso il centro R si tirino le RN RO RP RQ. Si dimostrerà similmente come *nella Proposizione XXIII. del libro undecimo degli Elementi*, che la BA è maggiore della RN.

Si conduca dal punto R la RX perpendicolare al piano del cerchio NOPQ, e si faccia il quadrato della RX uguale all'eccesso, in cui il quadrato della BA supera il quadrato della RN ; e si congiungano le NX OX PX QX.

E perchè la RX è perpendicolare al piano del cerchio NOPQ, saranno retti gli angoli XRN XRO XRP XRQ ; sicchè essendo le RN RO RP RQ fra di loro uguali, e la RN comune e ad angoli retti, saranno uguali fra di loro anche le basi XN XO XP XQ. Di nuovo essendo il quadrato della RX uguale all'eccesso, in cui il quadrato della BA supera il quadrato della RN, saranno li quadrati delle RX RN uguali al quadrato della BA : ma i quadrati delle RX RN sono anche uguali al quadrato della XN; dunque il quadrato della BA è uguale al quadrato della XN ; e perciò la BA è uguale alla XN:

 la

la BA poi è uguale a ciascuna di esse AC DE EF GH HI KL LM, e la XN è uguale a ciascuna di esse XO XP XQ: laonde ciascuna di esse BA AC DE EF GH HI KL LM è uguale a ciascuna di esse NX XO XP XQ. E perchè le BA AC sono uguali alle NX XO, e la base BC è uguale alla base NO, sarà l'angolo BAC uguale all' angolo NXO: allo stesso modo si dimostrerà l'angolo OXP uguale all' angolo DEF, l'angolo PXQ all' angolo GHI, e l'angolo NXQ all' angolo KLM: dunque da quattro angoli piani NXO OXQ PXQ QXN uguali ai quattro angoli dati BAC DEF GHI KLM si è costruito l'angolo solido al punto X; il che bisognava fare.

Corollario.

Da quanto si è detto ne segue, che la risoluzione del Problema Generale, *Costruire un angolo solido da quanti angoli piani si vogliano minori di quattro retti, e de' quali tutti gli altri sieno maggiori di uno, presi in qualunque modo*, dipende dalla risoluzione di quest'altro. *Date quante linee rette si vogliano, delle quali tutte le altre sieno maggiori di una, prese in qualunque modo; costruire da linee ugua-*

uguali alle medeſime un poligono, d' intorno a cui poſſaſi circonſcrivere un cerchio.

Siccome però, quando le linee rette ſieno più di quattro, ſorpaſſa il Problema le forze della Geometria, così io farò fine a queſte ricerche, baſtandomi di aver eſpoſto il modo di coſtruire un angolo ſolido da quattro angoli piani dati, il che, per quanto è a mia cognizione, non è accaduto ad alcun altro di ritrovare. Solo il Commandino ne' ſuoi commentarj al libro undecimo di Euclide pretende di dare una riſoluzione non meno di queſto caſo, che del Problema generalmente preſo: ma a chi la legge con attenzione, chiaramente appariſce, ch'egli ſuppone, tacitamente, ritrovato il Problema ſecondo menzionato nel Corollario, ch' è lo ſteſſo di dire, che ha ſolo ſimplificata la riſoluzione, non però del tutto eſaurita.

Il Fine dell' Appendice all' Opuſcolo primo.

OPU-

OPUSCOLO SECONDO

SUL GETTO DELLE BOMBE

E SPEZIALMENTE

NE' PIANI INCLINATI.

PREFAZIONE.

ESsendomi avvenuto di fare alcune riflessioni sul getto delle bombe, e di ritrovare un nuovo metodo di tirarle sopra i piani inclinati un pò più sicuro, a mio credere, di quelli fino ad ora praticati; così al primo ho aggiunto questo secondo Opuscolo, in cui colla maggior diligenza ho esposto i miei divisamenti. Sommetto per altro ogni cosa all' esame degli eruditi Artiglieri, di cui oggi mai sono piene tutte le Nazioni di Europa, come a' soli Giudici competenti in questa materia,

L teria,

teria, la quale quantunque si soglia trattare matematicamente, ciò nulla ostante è tanto implicata colla pratica, che senza il possedimento di questa non si può dar giudizio retto della riuscita di cose proposte teoricamente, e in astratto.

§. I.

§. I.

DOpo che le Scienze uſcite della barbarie, in cui erano immerſe, ricominciarono a fiorire in Europa, le Arti tutte cangiarono d' aſpetto, e da rozze e ſervili divennero colte e inventrici, ricercando in ogni coſa ordine ed eſattezza. Quindi fu, che anche l' Arte della Guerra ne ritraſſe utili immenſi, e le Matematiche Scienze furono in ſuo prò sì felicemente impiegate, che ſiamo pervenuti a ſuperare in alcune di lei parti gli Antichi, benchè in molte altre, e forſe nelle più eſſenziali, non abbiamo potuto ancora uguagliarli. Ma ſe in alcuna ſi ſono fatti de' progreſſi, ſi è certamente in quella delle Fortificazioni, per cui l' Arte di coſtruire, di attac-

care, e di difendere le Piazze, è ridotta a regole ſicure e coſtanti, e fuori di ogni dubbio ſuperiori a quelle degli Antichi, che laſciò giugnere fino a noi l'ignoranza de' tempi, e de' ſecoli proſſimi paſſati. Le rimanenti parti della Guerra non ſono però arrivate al ſegno ſublime, come altri crede, e ſpezialmente nella coſtruzione e nell' uſo delle Artiglierie ci reſtano molte coſe da ritrovare, che ſono sfuggite alle ricerche degli eruditi Militanti, e alla meditazione de' più profondi Filoſofi. E parlando del getto delle bombe, chi è, che non ſappia in quanta difficoltà ſia ancora involta queſta materia; e quanto inutilmente ſi affatichino gli Artiglieri per ottenere l' intento loro?

§. II.

Sembrava, che li ritrovati dell' immortale Galileo, e de' celebri Matematici che lo ſeguirono, aveſſero appianata ogni difficoltà, dimoſtrando, che la curva deſcritta da un projetto ſpinto con una direzione qualunque debbe eſſere parabolica; e che ne' piani orizzontali le ampiezze, o ſia le lunghezze de' tiri (reſtando invariabile la forza motrice) ſono come i ſeni de' doppj angoli d' inclinazione. Ma la irregolarità nella forza della polvere, e la reſiſtenza dell' Aria, preſcindendo da altre minori ragioni, ſono sì conſiderabili, ch' è forza confeſſare

non essere questi ritrovamenti troppo alla pratica adattabili, e atti a farci conseguire quell'esattezza, a cui aspiriamo.

§. III.

Per togliere quella ineguaglianza ne' tiri, che viene prodotta dalla irregolarità nella forza della polvere, venne in pensiero all' illustre Commentatore di Polibio di proporre, pel getto delle bombe, l'uso delle Catapulte degli Antichi in luogo de' nostri mortaj. La qual' idea quantunque paja felice, e sieno da sperarsi immensi vantaggj, s' ella regga alla pratica, nulladimeno non si trovò ancora chi potesse, o volesse fare in grande quelle sperienze, che ad autorizzare valessero il cambiamento di una macchina per l' altra. E pure è così grande questa irregolarità, di cui parliamo, che si dovrebbe seriamente cercare, s'è vero, che una forza d'Elasticità, colla quale si raccoglie dalle Antiche Storie essere stati mossi pesi meravigliosi, possa con profitto surrogarsi a quella della polvere da guerra nel getto delle bombe.

§. IV.

L' aria poi è da alcuni creduta poter poco o niente influire sul moto de' projetti, mentre da altri vien preteso, che sia essa una resistenza capace,

più

più di ogni qualunque, a ritardare i loro movimenti ed a cangiarne la natura: di maniera che questa differenza di opinione ha prodotto fra gli Artiglieri disparità di modo nel gittare le bombe. Gli uni sperando, che ad onta della resistenza dell' aria, possano le leggi del moto de' projetti, dimostrate sì sottilmente da' Meccanici, adattarsi alla pratica, sogliono dopo un tiro di pruova regolare l' inclinazione del mortajo secondo la distanza e l' altezza del luogo in cui dee mandarsi la bomba; mentre gli altri affatto rigettandole, perchè le vedono non reggere per la massima parte al confronto co' fatti, si sono messi a graduare sempre il mortajo ad un angolo costante, ch' è di ordinario il semiretto, e a forza di pura pratica determinano la quantità di polvere necessaria a spignere la bomba fino allo scopo; fra i quali vi sono anche gli Artiglieri della Repubblica Serenissima, per cui ho l' onore di militare (*).

§. V.

(*) *Fra gli altri, che seguono questa seconda opinione, si trova il Sig. Cavaliere Alessandro Papacino d' Antonj, Suggetto celebre e noto per molte eccellenti sue Opere, a cui domando la permissione di citare per autorità il nome suo. Questi in una Memoria sul proposito nostro, che, ricercatone, ebbe la gentilezza di farmi avere, dopo di aver dichiarato alcune instruzioni generali, che si danno a' Bombardieri del Re, chiaramente esprime il proprio sentimento, dicendo:* La sperienza dimostra affatto insussistente la Teoria de' projetti nel vuoto, e quindi riesce vano l' uso delle Tavole de' seni ec. *Un parlare sì assoluto di persona versatissima nell' Artiglieria mi somministra una nuova ragione per mettermi fra li seguaci di questo secondo partito.*

§. V.

Rispettando l'autorità de' primi, e della colta Nazione che ha quest' uso, io credo più sicuro e meno soggetto a' considerabili errori il metodo pratico de' secondi, quando pure i tiri si facciano ne' piani orizzontali; avvegnachè con facilità e senza molto dispendio si possa unire in alcune Tavole (come farò vedere in appresso) una serie di esperienze a comune benefizio degli Artiglieri, mediante le quali ognuno, anche non fornito di lunga pratica e di molte cognizioni, sarà in istato di fare ne' sopraddetti piani de' tiri, che non andranno certamente guari lontani dall' oggetto preso di mira.

§. VI.

La difficoltà maggiore per gli seguaci di questo metodo pratico consiste, allora che si debba tirar di bomba ne' piani inclinati; nel qual caso siccome poco vale la sperienza, perchè infinito è il numero degli angoli d'inclinazione, che può avere un piano coll' Orizzonte, così essi non hanno regola di sorte per determinare la carica del mortajo. Per la qual cosa dopo di aver parlato della costruzione e dell' uso di quelle Tavole, che abbiamo detto dover facilitare i tiri ne' piani Orizzontali, ci studieremo

di

di suggerire in quest' Opuscolo un metodo per tirare ne' piani inclinati, che conduca alla verità un poco più sicuramente di quello dedotto dalla sola Teoria, a cui non sappiamo aderire, per le ragioni medesime, neppure in quest' ultimo caso.

§. VII.

Quasi ogni Nazione usa mortaj differenti da quelli dell' altre o nel diametro della bocca, o nella lunghezza dell' anima, o nella forma e grandezza della Camera, ovvero finalmente per tutte queste cose insieme. E' necessario per tanto, che in tutte quelle parti, dove si voglia stare al metodo pratico soprammentovato, instituiscansi da' Bombardieri un certo numero di sperienze su tutti li mortaj che maneggiano, anche quando uno non variasse dall' altro, che nella qualità della camera; essendo noto, quanta ineguaglianza nella lunghezza de' tiri produca questo solo divario. Queste sperienze per ogni mortajo avrebbero però ad essere eseguite colla polvere più ordinaria, cioè con quella che comunemente s' adopra ne' cannoni e mortaj, e su una compagna orizzontale, onde potere poi da esse comporre una Tavola, il cui semplice uso sarà di servire per far de' tiri con quel dato mortajo sopra i piani orizzontali; ma io mostrerò in progresso,

so, com' ella possa valere per tirare anche sopra un piano comunque coll' orizzonte inclinato.

§. VIII.

Ora passando a dichiarare il modo col quale si dovrebbero compilare queste Tavole per ogni mortajo; si supponga, per esempio, che vogliasi quella del Mortajo da 50. Veneto, che ha la sua camera a cono tronco. Posto perciò il mortajo sopra una pianura, si mettano prima nella camera 4. Oncie di polvere, e si finisca di caricare il mortajo, mettendovi però dentro la bomba ridotta al peso, che ha d' avere quando è carica di polvere, e spola: e poi s' inclini il pezzo in modo, che l' asse dell' anima faccia un angolo semiretto coll' orizzonte, la qual inclinazione avrà da essere costantemente mantenuta anche ne' tiri, che si dovranno fare in appresso; indi dato fuoco al mortajo si esamini a che distanza sarà arrivata la bomba. Questa stessa sperienza sia replicata alquante volte, usando di tutte quelle diligenze nel caricare il mortajo, che possano procurare tiri presso che uguali; dopo di che si prenda, secondo il solito, un medio fra questi tiri, che sia di Passi geometrici 95, e in una Tavola simile a quella, ch' è qui sotto registrata, si scriva nella prima Colonna, dove dee segnarsi la quantità

di polvere impiegata nel tiro, il numero 4, e nella seconda colonna a fianco al numero stesso si scriva il 95, ampiezza media ritrovata. Dopo questa prima sperienza, se ne faccia una simile, impiegando 5 Oncie di polvere in vece di 4 per la carica del Mortajo, e siasi ritrovato per ampiezza media Passi 115, che si scriveranno sotto al numero 95 della seconda colonna, come il 5 sotto al 4 della prima; e vorrà dire, che con 5 Oncie di polvere un Mortajo da 50 Veneto spigne la bomba a una distanza orizzontale di circa Passi 115. Si continui a far lo stesso, mettendo nel mortajo 6, 7, 8 ec. Oncie di Polvere fino a Oncie 18, ch' è la quantità maggiore di cui la camera sia capace; e per ognuna di queste cariche si determini l' ampiezza media corrispondente, ed ella si noti nella Tavola, come si vede qui sotto espresso. E questa sarà appunto quella Tavola, colla di cui scorta potrà ogni Artigliere, per rozzo che sia, purchè sufficientemente instrutto nell' Aritmetica, far de' tiri col mortajo da 50 ne' piani orizzontali con quanta esattezza basta in sì fatte cose, senza aver bisogno di cognizioni, che sono d' ordinario superiori alla portata de' suoi lumi.

Ta-

Tavola pel Mortajo Veneto della portata di 50.

Oncie di polvere per la Carica	Ampiezze in Passi Geometrici
4	95
5	115
6	135
7	156
8	177
9	199
10	221
11	244
12	267
13	290
14	314
15	338
16	362
17	387
18	412

Questa Tavola però è da me proposta in forma d'esempio, nè vorrei, che alcuno credesse potersene valere pel mortajo da 50 Veneto; mentre non essendo io in istato di poter far esperienze di questa natura, hommi dovuto contentare di presentare al pubblico una Tavola, ch'è fittizia, in vece di una vera, come n'aveva desiderio.

§. IX.

E per venire alla spiegazione dell'uso di questa Tavola, suppongasi, che s'abbia a gittare una bomba sopra un piano orizzontale alla distanza di 290 Passi con un mortajo della portata di 50: si domanda la quantità della carica.

Si osservi prima di ogni altra cosa, se la polvere, che si ha da adoprare sia della stessa attività di quella, colla quale si son fatte le sperienze registrate nella Tavola; e questo si otterrà caricando il mortajo (sempre inclinato secondo un angolo semiretto) con una data quantità di polvere, come con Oncie 7, e ricercando l'ampiezza media a questa carica corrispondente; imperciocchè se sarà di Passi 156, come si ritrova nella Tavola a fianco alle Oncie 7, sarà segno, che la polvere è della forza medesima di quella delle sperienze; se maggiore, di maggiore attività sarà pure la polvere; e

di

di minore, se la lunghezza del tiro sarà minore di 156 Passi Geometrici.

Ma sia prima della stessa attività: e nella nostra Tavola si cerchi, se v'ha nella seconda colonna il numero 290, e qual quantità di polvere gli sia corrispondente; e si troverà che in fatti vi è; e che al suo fianco nella prima colonna v'ha il 13; e questo vorrà dire, che colla carica di Oncie 13 si manderà la bomba alla distanza proposta di Passi 290. Che se la lunghezza del tiro non fosse stata di passi 290, ma in vece di 326, numero, il quale non si trova nella seconda colonna della Tavola; allora sarà d'uopo osservare fra quali numeri della colonna medesima egli abbia luogo, che sarà tra il 314 e il 338, differenti uno dall'altro Passi 24; siccome il minore di essi numeri cioè il 314 dalla lunghezza 326 differisce di Passi 12. Si farà dunque la seguente regola aurea, se Passi 24 di differenza nella lunghezza di due tiri sono stati prodotti dalla differenza di Oncie 1 nella quantità della carica, Passi 12 di differenza fra due altri tiri da qual differenza di carica possono essere prodotti; e s'avrà per quarto proporzionale un mezzo d'Oncia, che aggiunto a Oncie 14, corrispondenti al minore di essi numeri 314, darà in tutto Oncie 14 $\frac{1}{2}$ per la carica necessaria a spignere la bomba alla data distanza di 326 Passi.

Ma

Ma se la polvere non sia della stessa attività di quella delle sperienze, ma di maggiore, come se con Oncie 7 fosse andata la bomba ne' tiri di pruova alla distanza media di Passi 168 in luogo di 156, che sono nella Tavola assegnati alla carica di 7 Oncie di polvere; in questo caso per approssimazione si potrà dire, che la forza della polvere delle sperienze registrate nella Tavola, sta alla forza di quella, che si ha per le mani, come il 156 al 168, ovvero il 13 al 14; sicchè ritrovato, come prima, che per cacciare la bomba alla distanza di Passi 326, presisi per esempio, vi vorrebbe una carica di Oncie 14 $\frac{1}{2}$, quando la polvere fosse della stessa attività di quella della Tavola, si dovrà indi diminuire di un quattordicesimo questa quantità di Oncie 14 $\frac{1}{2}$, ovvero fare una regola aurea inversa, dicendo, come 14 forza della polvere che si ha da adoprare, al 13 forza di quella delle sperienze; così inversamente le Oncie 14 $\frac{1}{2}$, colle quali si dovrebbe caricare il Mortajo, se non vi fosse varietà nella forza delle polveri, ad un quarto proporzionale, che sarà di Oncie 13 $\frac{13}{28}$, cioè poco meno di Oncie 13 $\frac{1}{2}$; e questa sarà la quantità di polvere con cui si ha a caricare il mortajo da 50, affinchè vada la bomba alla distanza data di 326 Passi.

Quello, che ho detto per regola di chi avesse a servirsi ne' tiri di polvere più attiva di quella adopra-

doprata nella coſtruzione della Tavola, ſi dovrà praticare nel caſo, che foſſe di attività minore con accreſcere la carica ſecondo la proporzione del mancamento nella forza.

§. X.

Queſto metodo del paragrafo antecedente per ritrovare la carica di un mortajo, quando la polvere ſia di attività differente di quella delle ſperienze, ſuppone due coſe. L'una, che la forza di due diverſe qualità di polvere ſia proporzionale alle ampiezze medie ottenute colla ſteſſa quantità; e l'altra ſi è, che le ampiezze medie fatte con polvere della ſteſſa qualità ſieno proporzionali alle cariche. E quanto alla prima ſuppoſizione ognun vede, che non può eſſere molto lontana dal vero, trattandoſi di una differenza nell'attività delle polveri, ch'è ſempre leggiera: ma riguardo alla ſeconda, benchè non ſia realmente vero, che le ampiezze medie fatte colla ſteſſa qualità di polvere ſieno proporzionali alle cariche; tuttavolta nelle cariche differenti fra loro di una ſola Oncia al più, può aver luogo la ſuppoſizione, al modo ſteſſo come ne' calcoli trigonometrici ſogliono praticare i Matematici, prendendo le differenze de' ſeni, coſeni ec. proporzionali alle differenze degli angoli, ſe queſti non differiſcano

fra

fra di loro più di un minuto primo ; quantunque dimostrino essi medesimi non vera questa proporzione .

§. XI.

Se non si dovesse tirar di bomba che ne' piani orizzontali, dopo la formazione delle Tavole di cui abbiamo parlato, non vi sarebbe difficoltà di sorte sul getto delle bombe; ma di rado accade che siasi in tale circostanza, mentre il più delle volte conviene gittar bombe sopra piani superiori o inferiori all' orizzonte del mortajo . Di questo si prendono poco pensiero coloro, che inclinano più o meno il Mortajo a norma della lunghezza del tiro , e della inclinazione del piano su cui si tira ; poichè una volta ammessi i principj teorici del getto de' projetti, con non molta difficoltà si assegna l' angolo d' inclinazione da darsi al mortajo anche allora che la bomba debba andare su un piano superiore o inferiore : e se quelle verità, che sono infallibili in teoria, reggessero poi in pratica , e non vi fossero circostanze , che ne cangiassero i risultati, con questo mezzo si conseguirebbe una precisione inarrivabile per altra strada . Ma la ragione della resistenza del mezzo, e altre cose minori, per cui gli Artiglieri di molte Nazioni hanno abbandonato inte-

ramente

ramente il metodo soprammentovato ne' piani orizzontali, li hanno anche obbligati a non seguirlo ne' piani inclinati. Questi però siccome ne' piani orizzontali hanno surrogato alla Teoria le loro proprie sperienze, che ho mostrato *ne' paragrafi antecedenti* come si potrebbero per maggiore utilità ridurre in Tavole, così negl' inclinati non hanno saputo cosa sostituire, perchè, come abbiamo detto *nel Paragrafo VI*, infiniti essendo gli angoli d' inclinazione che può avere un piano coll' orizzonte, non è possibile farne per ogni angolo, e sarebbe anche difficilissimo; se non si volessero fare che per un certo numero. Se dunque non si può unire una serie di sperienze, che servano di norma per tirare di bomba ne' piani comunque coll' orizzonte inclinati, e se il metodo dedotto dalla sola Teoria si crede molto lontano dal vero; resta solo il rifugio di cercarne uno, il quale si appoggi bensì in qualche parte alla Teoria, ma tenti nel tempo stesso di combinarla colla pratica, onde somministrare un' esattezza maggiore de' praticati. Questo è quello che ho procurato di rinvenire, e ch' espongo all' esame de' pratici Artiglieri, perchè possano conoscere se vi sono riuscito.

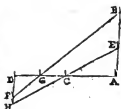
§. XII.

Ma ſiccome prima di far un tiro in un piano inclinato è neceſſario determinare la diſtanza orizzontale del mortajo dallo ſcopo, ch' è inacceſſibile nell' azioni vive; non meno che l' altezza di queſto ſopra o ſotto l'orizzonte di quello, le quali due miſure deggiono ſervir di guida in tutto il corſo dell' operazione; così non ſarà fuori di propoſito dimoſtrare innanzi, come ſi poſſa ottenere la diſtanza orizzontale, non valendoſi di altro Stromento che della Pertica, e l' altezza, col ſolo mezzo della Squadra de' Bombardieri, ſenza ricorrere ad altri Strumenti, che bene ſpeſſo non poſſono averſi in pronto. E per conſeguire la prima ſervirà la riſoluzione del ſeguente Problema.

§. XIII.

Problema. Miſurare la diſtanza di un punto acceſſibile a un punto inacceſſibile col mezzo della ſola pertica.

Sia

Sia dato il punto A acceſſibile, e il punto B inacceſſibile: biſogna ritrovare la diſtanza dal punto A al punto B. Dal punto A in una direzione qualunque AD verſo cui non trovinſi oſtacoli nel terreno, che impediſcano l' operazione, ſi miſuri un certo numero di Pertiche come di 30, e ſi ſegni con un paletto il punto C, che determina tale lunghezza; poi ſeguendo in detta direzione a contare fino al numero di 45 Pertiche, preſe dal principio, ſi ſegni il punto G, e finalmente il punto D dopo averne numerate 60: Sarà dunque la GD di Pertiche 15, mentre la AG è di 45; laonde la AG ſarà tripla della GD. Nella direzione poi de' punti A B ſi metta, comunque ſi voglia, il paletto E, e miſurata la diſtanza fra i punti E C, ſi ponga nella direzione di eſſi punti dopo C tante pertiche, piedi, ec. di quanti ſi ſarà eſſa trovata, ſegnando così il punto H; e per fine ſi ſegni un altro punto F, che ſia tanto nella direzione de' punti B G, che in quella de' punti D H, e miſurata la diſtanza DF tra i punti D F, dico che il triplo di eſſa DF ſarà uguale alla AB diſtanza ricercata.

Imperciocchè s' intendano condotte le linee rette AD AB DH ECH BGF.

E poichè la AC è uguale alla CD; essendo amendue di Pertiche 30, e parimenti la EC è uguale alla CH, e l'angolo al vertice ECA è uguale all'angolo al vertice DCH, sarà il triangolo ECA uguale al triangolo DCH, e l'angolo AEC sarà uguale all'angolo CHD; e sono alterni: dunque la AB è parallela alla DH, e in conseguenza il triangolo ABG è simile al triangolo DGF, e come la AG alla GD, così sarà la AB alla DF; ma la AG è tripla della GD; laonde anche la AB sarà tripla della DF. Si triplichi pertanto la misura ritrovata tra i punti D F, e s'avrà la distanza AB dal punto accessibile A all'inaccessibile B; il che bisognava fare.

§. XIV.

La sopraccennata risoluzione è simile a quella, che pel Problema medesimo viene suggerita da Vauban nell'eccellente suo *Trattato dell' Attacco, e Difesa delle Piazze*: anzi tutta la differenza consiste in ciò, che a me basta di condurre le AB DH solamente parallele fra loro, laddove egli prescrive che sieno tirate amendue perpendicolari alla direzione AD, per la qual cosa bisogna, come intende l'Autore, servirsi di corde, che non sempre si possono avere

alle

alle mani, e con cui, quando non fossero estremamente lunghe, non si potrà mai ottenere che la AB sia parallela alla DH con quell' esattezza come nel metodo, che ho descritto. E se anche col mezzo di soli paletti si tirassero amendue le AB DH perpendicolari alla AD (il che è pure possibile); tuttavolta siccome l'operazione riuscirebbe lunga e tediosa, così credo, che la risoluzione proposta meriti di essere preferita a quella del celebre Autore.

§. XV.

Quantunque paja a primo aspetto, che nella risoluzione di questo Problema si sia supposto orizzontale il terreno su cui vien fatta l' operazione; nulladimeno dopo un poco di riflessione ognun vedrà, che si può eseguirla ugualmente anche sopra piani inclinati, purchè i raggi visuali tra i punti, che si vanno di mano in mano segnando, sieno liberi: solo in questo caso converrebbe misurare le distanze orrizzontalmente, come si fa da' Periti e Agrimensori nel rilevare Disegni di Possessioni poste sopra colline, o monti. Parimenti è facile a conoscere, che in luogo di prendere la AG tripla della GD, come si è fatto, puossi prenderla moltiplice comunque, e allora la AB sarà ugualmente moltiplice della DF.

§. XVI.

§. XVI.

Paffiamo ora a dimoftrare il modo col quale fi può, allora che lo fcopo fu cui dee fpignerfi la bomba e il luogo ov' è meffo il mortajo non fieno nello fteffo piano orizzontale, mifurare la differenza de' livelli. Per ottenere la qual cofa benchè valgano molti Strumenti adoprati dagl' Ingegneri; nulla oftante mi fia permeffo ricordare, come colla fteffa fquadra di cui fanno ufo gli Artiglieri, altri per graduare più o meno il mortajo, ed altri per inclinarlo fempre ad un angolo femiretto coll' orizzonte, fi poffa confeguire l' intento medefimo.

Solo bifognerebbe alla fquadra ABD aggiungere una riga CD, e dividere amendue le BD DC in parti uguali e della maggior poffibile moltitudine, come in 1200 parti, fe ognuna delle BD DC foffe dì Oncie 18, e finalmente collocare la numerazione nella BD da B verfo D, e da C verfo D nella CD. Con quefta femplice aggiunta vale la fquadra fopraddetta a mifurare qualunque altezza, come può renderfi manifefto a chiunque fia fufficien-

temen-

temente versato nelle Matematiche Scienze: pure per facilitarne l' uso nella balistica ai meno esperti, si metterà qui per disteso il modo di servirsene per determinare la differenza de' livelli fra due punti posti non nello stesso piano orizzontale, uno de' quali sia solo accessibile, e l' altro comunque si voglia.

§. XVII.

Dati due punti posti non nello stesso piano orizzontale, uno de' quali sia solamente accessibile: si ricerca la differenza de' loro livelli.

Sieno I F li due punti dati posti non nello stesso piano orizzontale~~, de' quali I sia~~ solo accessibile: bisogna trovare la differenza de' livelli dei punti I F.

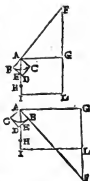
Prima di tutto si determini *pel* §. *XV.* la distanza orizzontale fra i punti I F, cioè la IL; e sia di Piedi 825: poi si congegni su qualche sostegno la squadra per modo, che il centro A sia nella stessa direzione verticale col punto I; e indi s' inclini la squadra più o meno fino a che traguardando per la direzione AB, si trovi coll' occhio l' altro punto F, e lascia-

laſciata alcun poco la ſquadra in quiete, ſicchè poſſa fermarſi il pendolo, oſſerviſi ſe il filo ſeghi la BD, ovvero cada nel punto D, ovvero finalmente ſe ſeghi la linea retta CD.

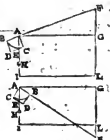
Seghi primieramente la BD, come in queſte due figure, nella prima delle quali ſi ſuppone il punto F ſopra l'orizzonte del punto I, e viceverſa nella ſeconda figura, ma eſſendo affatto ſimile la riſoluzione di queſti due caſi, ſi ſono unite le figure, e quello che vien detto per una può ugualmente applicarſi anche all' altra. Di poi ſi noti di quante parti è la BE; e ſiaſi trovata di 1100 : e finalmente ſi faccia come la BE alla BA, così la diſtanza orizzontale IL ad un quarto proporzionale, ovvero ſoſtituendo, come 1100 a 1200, così Piedi 825 a Piedi 900 : e dico di tal miſura eſſere la differenza de' livelli de' punti A F.

Imperciocchè pel punto A ſi conduca l'orizzontale AG: ſarà dunque retto l' angolo HAG, la AG ſarà uguale alla IL; e la GF ſarà la differenza de' livelli de' punti A F.

E perchè la AH è parallela alla GF ſarà l' angolo BAE uguale all'angolo AFG; il retto poi ABE è uguale al retto AGF : dunque il triangolo ABE è ſimile al triangolo AGF, e come la BE alla BA,

così

così farà la AG alla GF; il che si era proposto di dimostrare. Pertanto se alla retta FG, ritrovata colla sopraccennata regola aurea, s' aggiunga nella figura prima, o si tolga nella seconda, l' altezza del punto A sopra I, che può misurarsi agevolmente con un piombino, s' avrà la FL o sia la differenza de' livelli de' punti I F; la quale sarà per conseguenza di Piedi 904 nella prima figura, e di piedi 896 nella seconda, quando sia l' altezza AI di Piedi 4.

Ed è chiaro, che se il filo della squadra cada sul punto D, allora riuscirà la AG uguale alla GF; e però alla AG, ch' è di Piedi 825, aggiunta o tolta l' altezza AI di Piedi 4 si conseguirà l' altezza ricercata FL.

Ma il filo AH interfechi la CD in E, come in queste due altre figure, e sia CE di parti 800. E si faccia come la AC alla CE, così la IL o sia la AG ad un quarto proporzionale, che sarà, sostituendo i valori numerici, di Piedi 550; e dico, che di questa misura sarà la FG.

Poichè essendo uguali gli angoli retti FAC HAG, tolto il comune CAG nella prima figura e BAE nella seconda, resterà l' angolo EAC uguale all' angolo FAG; ma il retto ACE è pure uguale al retto AGF; laonde il triangolo ACE sarà simile al trian-

 golo

golo AGF; e perciò come la AC alla CE; così è la AG alla GF. Se dunque alla GF si aggiunga o si tolga la GL, ch' è di Piedi 4, s' avrà l' altezza ricercata FL di Piedi 554 nella figura superiore, e di Piedi 546 nella inferiore.

§. XVIII.

Nelle prime due figure del Paragrafo antecedente essendo come BE a BA, così la AG alla GF; e la BE è minore della BA; sarà ancora la AG minore della GF. E nelle due susseguenti essendo come la AC alla CE, così la AG alla GF; e la AC è maggiore della CE; sarà pure la AG maggiore della GF: e finalmente nel caso in cui il filo del pendolo cada sul punto D, del quale non si è fatta la figura per non moltiplicarne il numero fuori di proposito, sarà la AG uguale alla GF. Ne' tiri però di bomba fatti sopra piani inclinati, riuscendo sempre la distanza orizzontale IL maggiore dell' altezza FL e di molte pertiche, sarà anche la AG sempre maggiore della GF, avvegnachè la GL non sia che di pochi piedi: laonde per misurare l' altezza dello scopo sopra o sotto il piano orizzontale del mortajo, faremo mai sempre nel caso segnato dalle due ultime figure, cioè in quello dove il filo sega la CD. Per il che era inutile segnare nella

Squa-

Squadra le divifioni della BD, baftando folo quelle della CD per l'ufo, che ci eravamo propofto di confeguire: tuttavolta per rendere univerfale lo Strumento ho fuggerito di notare anche le divifioni fopraddette nella BD.

§. XIX.

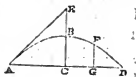
Ma è tempo, che venghiamo a dichiarare come fervendoci delle Tavole fatte pe' piani orizzontali, di cui abbiamo a lungo parlato, poffanfi ancora far de' tiri ne' piani inclinati, come mi fono fino da bel principio propofto di fare. E prima di tutto fi richiami alla mente quello, che ho detto *nel* §. *XI.*, cioè che fenza ricorrere alla Teoria, difficilmente o non mai fi potrà ftabilire qualche regola per tirare ne' piani inclinati; perchè in quefti, per la loro moltitudine, non fi poffono fare fperienze come negli orizzontali. Effendo dunque neceffario di ammettere, a guifa di fuppofizione, qualcuna delle leggi del moto de' projetti per cercare un metodo di tirare di bomba ne' piani inclinati, io ne affumerò una delle più femplici, che fupporrò corrifpondere, fe non precifamente, alla pratica, almeno quanto bafta per poterfi contentare in una materia, dove non fi tratta di una fcrupolofa efattezza. Ma vi farà forfe alcuno, che mi dirà.

Se volete che io vi conceda come sicura, o non molto lontana dal vero una delle leggi del moto de' projetti; siccome da questa ne deriveranno per conseguenza anche altre ed altre, ed in fine tutta la Teoria dimostrata da Meccanici, tanto fa, che io segua il metodo d'inclinare più o meno il Mortajo, dovendo tirare di bomba sopra piani orizzontali o inclinati, senza aver bisogno di Tavole pe' primi, e di ulteriori ritrovamenti per gli altri. Ed io rispondo, che sebbene questa obbiezione sembri a primo aspetto avere tutta la sua forza, apparirà nulla ostante chiaramente, dopo che avrò mostrato il nuovo metodo di tirare su piani inclinati, quanto ei debba condurre alla verità più dell'altro, come quello, che si appoggia alle Tavole fatte pe' piani orizzontali, della di cui accuratezza non occorre dubitare, le quali valgono a rettificare, per esprimermi così, gli errori che per conto della supposizione potrebbero insinuarsi nel corso dell' operazione.

§. XX.

La supposizione adunque, che io fo è la seguente. Una bomba tirata secondo l'angolo semiretto EAD coll' orizzonte, descrive una parabola ABD, a cui la direzione AE è tangente, e per asse ha la

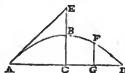
retta

retta BC condotta ad angoli retti all' ampiezza AD dal punto C della metà; dalla qual ipotesi ne deriva, che tirata qualunque retta FG parallela all'asse BC, sarà come la BC alla FG, così il quadrato della AC al rettangolo di AG in GD; e di più, che la EC, cioè la AC, sarà doppia della BC.

§. XXI.

Sia dunque proposto di tirare una bomba in un luogo collocato sopra o sotto l'orizzonte di un dato mortajo, ovvero sia da risolversi il seguente Problema.

Dato il sito A ove si debbe piantare un mortajo di una data portata, e il sito F ove si ha a gittare una bomba, non posti amendue nello stesso piano orizzontale: si ricerca quanta polvere abbiasi a mettere nella camera di un dato mortajo, che si vuole sempre inclinato secondo un angolo semiretto coll' orizzonte, perchè la bomba giunga in F.

Si fupponga avanti di ogni altra cofa, che s'abbia in pronto la Tavola, che ferve pe' tiri orizzontali del dato mortajo, e di cui fi farà ufo anche pe' tiri inclinati coll' orizzonte. Il punto F pertanto o è fopra l'orizzonte del punto A, o fotto.

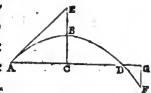
Sia in primo luogo di fopra: e fi mifuri, come fi è infegnato *nel* §. *XV.* l' orizzontale AG (che fi dirà orizzontale dello fcopo per non confonderla coll' altre); e *col* §. *XVII.* fi determini l' altezza GF fopra l'orizzonte AD del mortajo (che farà detta fimilmente verticale dello fcopo medefimo); e fia AG = a, GF = b; fia poi AFD la parabola, che ha da defcrivere la bomba tirata fecondo l'angolo femiretto EAD per pervenire allo fcopo F: e fe quefto non vi foffe, nè altri oftacoli incontraffe per cammino la bomba fi ponga, ch' ella andaffe a cadere in D ful piano orrizzontale AD, di modo che farebbe AD l' ampiezza orizzontale del tiro, fe poteffe la bomba feguitare il fuo corfo fino all' orizzonte predetto. Indi fatta AD = x, farà AC *pel* §. *XX.* uguale a $\frac{x}{2}$, la CB = $\frac{x}{4}$, la GD = $x - a$.

E perchè è come la BC alla FG, così il quadrato della AC al rettangolo di AG in GD, farà foftituen-

ſtituendo, $\frac{x}{4} : b :: \frac{x^2}{4} : a . \overline{x-a}$, e moltiplicando fra di loro i termini eſtremi e i medj della proporzione, levando le frazioni e riducendo, s' avrà l' equazione $ax - a^2 = bx$, e però $x = \frac{a^2}{a-b}$. Per avere dunque l' ampiezza orizzontale AD, che deſcriverebbe la bomba ſe non foſſe trattenuta dallo ſcopo F, non ſi ha che a fare il quadrato della linea orizzontale AG dello ſcopo, e poi dividerlo per l' eccesso in cui l' orizzontale AG ſupera la verticale GF dello ſcopo medeſimo, mentre nel quoziente s' avrà l' ampiezza orizzontale ricercata, che riſponde al tiro inclinato.

Ritrovata adunque queſta sì fatta ampiezza orizzontale con la regola ſopra eſpreſſa, non ſi ha che a vedere quanta polvere le corriſponda nella Tavola de' tiri orizzontali del mortajo, che ſi ha d' adoperare; imperciocchè appunto quella quantità dovrà ſervire di carica, affinchè la bomba pervenga allo ſcopo F poſto ſopra l' orizzonte del mortajo medeſimo.

Ma lo ſcopo F ſia ſotto l' orizzonte del punto A, e occorra di nuovo determinare la carica del mortajo, perchè la bomba vada in F.

Siaſi

Siasi come prima misurata l' orizzontale dello scopo AG = a, e l' altezza GF = b: e sia ABF la parabola, che ha da descrivere la bomba tirata secondo l'angolo semiretto EAC per pervenire in F, e AD sia l' ampiezza orizzontale di essa parabola. Si chiami poi AD = x, sarà BC = $\frac{x}{4}$, e DG = $a - x$. Perchè poi sta come BC a GF, così il quadrato della AC al rettangolo di AG in GD, sarà sostituendo $\frac{x}{4} : b :: \frac{x^2}{4} : a^2 - ax$; laonde sarà $bx = a^2 - ax$; e però $x = \frac{a^2}{a + b}$. L' ampiezza dunque orizzontale AD, che risponde al tiro inclinato è uguale al quoziente della divisione, che abbia per dividendo il quadrato della linea orizzontale dello scopo AG, e per divisore la summa dell' orizzontale AG e della verticale GF dello scopo. Determinata la quale, nella Tavola de' tiri orizzontali si raccoglierà la carica ricercata.

§. XXII.

§. XXII.

Sia per esempio proposto di spignere con un mortajo Veneto della portata di 50, una bomba ad uno scopo alto Piedi 30 sopra l' orizzonte del mortajo; e sia l' orizzontale dello scopo di Piedi 900: sarà il quadrato di 900 uguale a 810000, e l' eccesso di 900 sopra 30 sarà 870, pel quale diviso il numero 810000, s' avrà per quoziente Piedi 931 circa, ovvero Passi 186 : 1, o semplicemente 186 per scansare le frazioni. Quest' ampiezza di 186 Passi, siccome nella Tavola *del §. VIII.* si trova essere fra li numeri 177, 199, che corrispondono, il primo alla carica di 8 Oncie di polvere, e il secondo a quella di 9; così si cercherà col metodo insegnato *nel Paragrafo IX.* quanta polvere sia necessaria per gittare la bomba alla distanza media di 186 Passi; e si ritroverà, che debbe essere di Oncie 8 $\frac{9}{22}$, cioè Oncie 8, e poco più di un terzo. Sicchè caricato il mortajo da 50 con questa quantità di polvere, si potrà mandare la bomba allo scopo distante orizzontalmente Piedi 900, e innalzato Piedi 30 dal luogo, ov'è collocato il pezzo.

§. XXIII.

Per un fecondo esempio si cerchi la carica da mettersi nel suddetto mortajo per trasmettere la bomba ad uno scopo distante Piedi 1950, e depresso di Piedi 50. Sarà il quadrato di 1950 uguale a 3802500, e la summa della orizzontale e verticale dello scopo sarà di Piedi 2000, pel qual numero diviso il quadrato 3802500, si conseguirà per quoziente Piedi 1901 $\frac{1}{4}$, ovvero Passi 380 circa. Nella Tavola pertanto si troverà, che l'ampiezza orizzontale 380 è di mezzo fra i numeri 362, 387, il primo corrispondente alla carica di 16 Oncie, e l'altro a quella di Oncie 17; onde *col* §. *IX*. si verrà a determinare la carica di Oncie 16 e poco più di due terzi necessaria al mortajo da 50, perchè arrivi la bomba allo scopo distante orizzontalmente Piedi 1950, e depresso Piedi 50 dal sito, ov'è posto il mortajo.

§. XXIV.

Ed è per se stesso manifesto, che se l'ampiezza orizzontale, che corrisponde al tiro inclinato, si trovi maggiore di quella, che nella Tavola di un dato mortajo, sta a fianco alla massima carica di cui sia egli capace, sarà questo un segno sicuro, che

che con quel sì fatto pezzo non potrà mai la bomba giugnere nel luogo proposto: sicchè converrà adoprarne altro di portata maggiore.

§. XXV.

Si osservi per tanto, che questo metodo di tirare ne' piani inclinati, dipende bensì in parte da una Supposizione tolta dalle leggi del moto de' projetti, ma si appoggia principalmente alle Tavole costruite cogli esperimenti pe' piani orizzontali. E siccome conviene confessare, che se fossero fatte una volta per sempre con somma diligenza e accuratezza, renderebbero queste facile e sicuro (per quanto è possibile) il getto delle bombe su i piani orizzontali; così ancora si dovrà concedere, che un metodo per tirare sopra gl' inclinati, il quale riduce i tiri come si avessero a far sempre in un piano orizzontale, per determinare poi col mezzo delle Tavole la quantità di polvere da mettersi nel mortajo; merita di essere anteposto a quel medesimo, ch' essendo somministrato dalla sola Teoria dà de' risultati, i quali a detta de' più esperimentati Artiglieri, particolarmente ne' piani inclinati, molto dal vero si discostano, e sono colla pratica discordi. E questo sia per togliere quell' obbiezione, che *nel* §. *XIX.* mi venne fatto di propormi.

 §. XXVI.

§. XXVI.

Quanto si è detto nel descrivere il nuovo modo di tirare ne' piani inclinati, e negli esempj, che servono a renderne chiara la pratica, suppone, che la polvere di cui si debba far uso, sia della stessa attività di quella delle Tavole: ma se si voglia esperimentare se in fatti sia così, basta fare uno o più tiri orizzontali di pruova, come si è veduto *nel* §. *IX.* Non essendo però sempre in nostra balìa fare questi tiri di pruova sopra un piano orizzontale, così stimo non riuscirà discaro, che io dimostri in qual maniera si possa riconoscere, se la polvere, che si ha d'adoprare sia della stessa attività di quella delle Tavole, o di differente, anche quando i tiri di pruova si eseguiscano sopra un piano comunque coll'orizzonte inclinato: imperciocchè, quando si trovi qualche divario, convenga poi fare nella carica del mortajo que' cangiamenti, che sieno proporzionati alla differenza nell' attività.

§. XXVII.

Si eseguiscano dunque più tiri di pruova sopra un piano comunque coll' orizzonte inclinato e sempre colla stessa quantità di polvere, e di questi tiri preso un medio, se ne segni il luogo corrispondente sul piano inclinato col mezzo di un paletto; e indi

si mi-

ſi miſuri la diſtanza orizzontale del paletto dal mortajo, e la ſua altezza ſopra o ſotto l' orizzonte di quello; e ſiaſi ritrovato, per eſempio, che con Oncie 12 di polvere un Mortajo da 50 abbia ſpinto la bomba a un punto diſtante orizzontalmente Piedi 1250, e alto Piedi 50 ſopra il pezzo: ſi domanda l' attività della polvere adoprata.

Col metodo inſegnato *nel* §. *XXI.* ſi rinvenga l' ampiezza orizzontale riſpondente al tiro inclinato ſegnato dal paletto; il che ſi otterrà facendo il quadrato di 1250 e dividendolo per 1200 differenza fra il 1250 e il 50; e s' avrà per quoziente Piedi 1302 $\frac{1}{12}$, ovvero Paſſi 260 $\frac{1}{2}$ circa, la quale ampiezza ſiccome è differente dal numero 267, che nella Tavola *del* §. *VIII.* corriſponde a Oncie 12 di polvere, così ſarà ſegno, che la polvere adoprata è di attività minore di quella della Tavola, e che ſta l' attività di una a quella dell' altra come 260 $\frac{1}{2}$: 267. Se l' ampiezza ritrovata foſſe ſtata maggiore di Paſſi 267, l' attività della polvere de' tiri di pruova ſarebbe ſtata maggiore; e uguale a quella della Tavola ſe il calcolo aveſſe dato preciſamente Paſſi 267 per l' ampiezza medeſima. Similmente ſi determinerà l' attività riſpettiva della polvere, quando i tiri di pruova ſieno fatti in un piano ſotto l' orizzonte del mortajo.

§. XXVIII.

§. XXVIII.

Allorchè però sia la forza della polvere ; che si debbe adoprare differente da quella delle Tavole, conviene ricorrere anche ne' tiri inclinati a quel suffragio di cui ci siamo valuti *nel* §. *IX.* per gli orizzontali. Ma per rendere più chiaro e intelligibile quanto si è detto fino ad ora, proporremo la risoluzione del seguente Esempio composto.

Debbasi con un mortajo da 50 tirare una bomba sopra un piano inclinato; e sia la distanza orizzontale dello Scopo dal mortajo di Piedi 1650, e l'altezza di quello sopra l'orizzonte di questo sia di Piedi 20: si ricerca la quantità della carica; stante che con Oncie 11 di Polvere si è fatto un tiro medio ~~di pruova, per~~ cui la bomba è arrivata ad un punto distante dal mortajo Piedi 1280 presi orrizzontalmente, e all'altezza di Piedi 80 sopra il suo orizzonte.

Per avere, prima di tutto, la forza rispettiva della polvere adoprata nella pruova, si faccia il quadrato di Piedi 1280, e s' avrà 1638400, il quale diviso per 1200 differenza fra 1280 e 80, darà per quoziente Piedi $1365 \frac{1}{3}$, ovvero Passi 273 circa, in luogo di 244, che nella Tavola *del* §. *VIII.* corrisponde alla carica di Oncie 11. L' attività dunque della polvere adoprata è maggiore

di

di quella della Tavola, e la prima sta alla seconda come 273 : 244, o prossimamente come 10 : 9.

Ora diviso il quadrato 2722500 di Piedi 1650, distanza orizzontale dallo Scopo, per 1630 differenza fra la detta orizzontale e l' altezza 20 dello scopo medesimo, s' avrà per quoziente Piedi 1670 $\frac{40}{163}$, ovvero Passi 334 per l' ampiezza orizzontele, che risponde al tiro inclinato da farsi. Si cerchi ora nella Tavola del mortajo da 50 fra quali numeri sia quest' ampiezza, e si ritroverà essere fra il 314 e il 338, che sono l' ampiezze spettanti una alla carica di 14 Oncie, e l' altra alla carica di Oncie 15. La differenza tra queste ampiezze è 24, e la differenza fra la minore 314 e la nostra ampiezza di 334 è 20: onde facciasi questa regola aurea, come 24 a 1 Oncia di Polvere, così 20 ad un quarto proporzionale, che sarà $\frac{5}{6}$ d' Oncia; di modo che la polvere da mettersi nel mortajo dovrebbe essere di Oncie 14 $\frac{5}{6}$, s' ella fosse della stessa attività di quella della Tavola; ma essendo di maggiore ve ne vorrà una quantità minore; e si saprà agevolmente quanto debba essere, dicendo (*veggasi il §. IX*), come il 10 forza della polvere che si dee adoprare, al 9 forza di quella delle Tavole, così inversamente le Oncie 14 $\frac{5}{6}$ ad un quarto proporzionale 13 $\frac{7}{10}$; ovvero poco più di Oncie 13 e un terzo per la carica necessaria all' uopo.

§. XXIX.

§. XXIX.

Spero, che non riuſcirà diſaggradevole queſta mia tenue fatica a quegli Artiglieri, che non vogliono fidarſi del metodo dedotto dalla ſola Teoria, ma amano di attenerſi, per quanto è poſſibile, alla pratica, pe' quali unicamente ella può valere. Eſſi, che per gli tiri ne' piani inclinati ſono coſtretti di andare a tentone nel determinare la carica, non dovrebbero ricuſare il nuovo metodo, che loro preſento, il quale ſe non ſomminiſtrerà preciſamente quello che conduce al vero, ſervirà almeno per ottenere una baſtevole approſſimazione, e ſarà ad ogni modo preferibile all' incertezza preſente. Non potrà negarſi almeno a queſta Operetta, comunque ſia ella dal Pubblico accolta, il merito di eſſere ſtato intrapreſa ſpezialmente per vantaggio degli Artiglieri della Repubblica Sereniſſima, al cui ſervigio ho l' onore di eſſere, i quali ſono del genere anzidetto, e non hanno fino adeſſo avuto regola di ſorte per tirare di bomba ſu i piani inclinati.

Fine dell' Opuſcolo Secondo ſul getto delle Bombe.